

**Formelsamling for matematik  
niveau B og A på  
højere handelseksamen**

**Undervisningsministeriet  
Erhvervsskoleafdelingen 1997**

# **Formelsamling for matematik niveau B og A på højere handelseksamen**

Udgivet af Undervisningsministeriet,  
Erhvervsskoleafdelingen 1997

1. udgave, 3. oplag. Januar 2001. 2000 stk.

Udarbejdet til faget matematik ved bekendtgørelse nr. 463 af 9. juni 1995 om  
den erhvervsgymnasiale uddannelse til højere handelseksamen.

Bestilles hos (UVM-7-326) sæt à 10 stk., (UVM-7-327) enkeltteksemplarer, hos  
Undervisningsministeriets Forlag,  
Strandgade 100 D  
1401 København K.  
Tlf. 3392 5220  
Fax 3392 5219  
E-mail: [forlag@uvm.dk](mailto:forlag@uvm.dk)  
eller hos boghandlere

Tryk: Boisen & Nielsen A/S

# Indholdsfortegnelse

## Niveau B

Procentregning.....	5
Rentesregning .....	6
Annuitetsregning.....	7
Potensregneregler .....	8
Linie .....	9
Parabel.....	11
Trekant .....	12
Funktion .....	14
Polynomier .....	16
Asymptote for polynomiumsbrøk .....	18
Ekspontielle funktioner .....	19
Logaritmefunktioner .....	21
Potensfunktioner.....	23
Trigonometriske funktioner .....	26
Lineær funktion i to variable .....	30
Differentialregning .....	31
Deskriptiv statistik.....	33
Sandsynlighedsregning.....	37
Stokastisk variabel .....	38
Binomialfordeling.....	39
Normalfordeling .....	40

## Niveau A

Vektorer i planen .....	43
Linie i planen.....	47
Afstand i planen .....	48
Parabel.....	49
Cirkel.....	50
Ellipse .....	51
Hyperbel .....	52
Kvadratisk funktion i to variable .....	53
Integralregning.....	54
Numerisk integration .....	57
Differentialligninger .....	58
Sandsynlighedsregning.....	59
Stokastisk variabel .....	62
Binomialfordeling.....	64
Normalfordeling .....	66
Konfidensinterval .....	68

<b>Areal</b> .....	71
--------------------	----

<b>Matematiske symboler</b> .....	72
-----------------------------------	----

<b>Stikordsregister for niveau B</b> .....	76
--	----

<b>Stikordsregister for niveau A</b> .....	78
--	----



# Procentregning

En pris stiger et år med 6%, det næste år med 4%, og det næste år igen med 12%. Den gennemsnitlige rentefod er

$$r = \sqrt[3]{(1+0,06) \cdot (1+0,04) \cdot (1+0,12)} - 1 = 0,0728$$

Den gennemsnitlige procentvise prisstigning pr. år er 7,28%.

Værdien  $-2$  antages at have vægten  $0,7$  og værdien  $6$  vægten  $0,3$ . Det vejede gennemsnit af  $-2$  og  $6$  er

$$x = (-2) \cdot 0,7 + 6 \cdot 0,3 = 0,4$$

Tabellen viser priser for en vare i 2 forskellige år.

År	1990	1995
Pris	45	54

Indekstallet for 1995 med basisår 1990 er

$$I = \frac{54 \cdot 100}{45} = 120$$

## Gennemsnitlig procent

Gennemsnitlig rentefod  $r$

af  $r_1, r_2, \dots, r_n$

$$r = \sqrt[n]{(1+r_1) \cdot (1+r_2) \cdot \dots \cdot (1+r_n)} - 1 \quad (1)$$

## Vejet gennemsnit

Vejet gennemsnit  $x$

af  $x_1, x_2, \dots, x_n$

med vægte  $r_1, r_2, \dots, r_n$

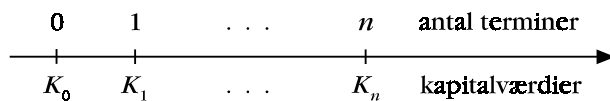
$$x = x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + \dots + x_n \cdot r_n \quad (2)$$

## Indekstal

Indekstal  $I$  for et år med værdi  $t$  ud fra et basisår med værdi  $b$

$$I = \frac{t \cdot 100}{b} \quad (3)$$

# Rentesregning



Startkapital  $K_0$

Rentefod  $r$  pr. termin

Antal terminer  $n$

Kapital  $K_n$  efter  $n$  terminer

## Fremskrivning

400 kr., der forrentes med 6% p.a.,  
er efter 5 år vokset til

$$K_5 = 400 \cdot (1 + 0,06)^5 = 535,29 \text{ kr.}$$

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n \quad (4)$$

## Tilbageskrivning

Det beløb, der forrentet med 6%  
p.a. og som efter 8 år er vokset til  
1500 kr., er

$$K_0 = 1500 \cdot (1 + 0,06)^{-8} = 941,12 \text{ kr.}$$

$$K_0 = K_n \cdot (1 + r)^{-n} \quad (5)$$

## Effektiv rente

Hvis renten er 2% pr. måned, så er  
den effektive rentefod p.a.

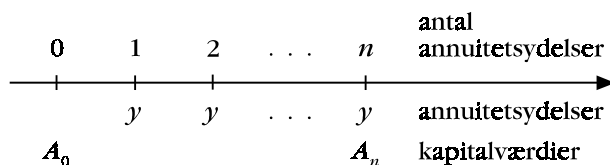
$$i = (1 + 0,02)^{12} - 1 = 0,2682$$

Den effektive rentefod  $i$  pr.  $n$  terminer

$$i = (1 + r)^n - 1 \quad (6)$$

Den effektive rente i procent p.a. er  
26,82%.

# Annuitetsregning



Hovedstol  $A_0$

Rentefod  $r$  pr. termin

Antal annuitetsydelse  $n$

Annuitetsydelse  $y$

Kapital  $A_n$  efter  $n$  annuitetsydelse

## Fremtidsværdi af en annuitet

### Opsparingsformlen

Der indbetales 100 kr. hvert år i alt 4 gange, og renten er 5% p.a. Værdien efter sidste indbetaling er

$$A_4 = 100 \cdot \frac{(1 + 0,05)^4 - 1}{0,05} = 431,01 \text{ kr.}$$

$$A_n = y \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \quad (7)$$

## Nutidsværdi af en annuitet

### Gældsformlen

Et lån tilbagebetales med 8 på hinanden følgende månedlige ydelser på 50 kr. Renten er 2% pr. måned. Lånets hovedstol er

$$A_0 = 50 \cdot \frac{1 - (1 + 0,02)^{-8}}{0,02} = 366,27 \text{ kr.}$$

$$A_0 = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad (8)$$

## Annuitetsydelse

### Amortisationsformlen

Den månedlige ydelse på et sædvanligt annuitetslån på 900 kr., der forrentes med 2% pr. måned og som har en løbetid på 6 måneder, er

$$y = 900 \cdot \frac{0,02}{1 - (1 + 0,02)^{-6}} = 160,67 \text{ kr.}$$

$$y = A_0 \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}} \quad (9)$$

# Potensregeln

$$x^7 \cdot x^4 = x^{7+4} = x^{11}$$

$$\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$$

$$(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$$

$$(x \cdot y)^5 = x^5 \cdot y^5$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$$

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$x^s \cdot x^t = x^{s+t} \quad (10)$$

$$\frac{x^s}{x^t} = x^{s-t} \quad (11)$$

$$(x^s)^t = x^{s \cdot t} \quad (12)$$

$$(x \cdot y)^s = x^s \cdot y^s \quad (13)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^s = \frac{x^s}{y^s} \quad (14)$$

$$x^0 = 1 \quad (15)$$

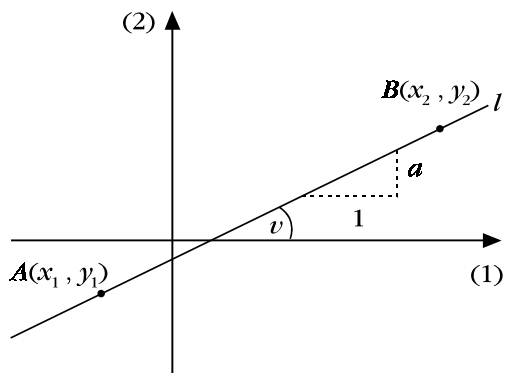
$$x^{-s} = \frac{1}{x^s} \quad (16)$$

$$\sqrt[s]{x} = x^{\frac{1}{s}} \quad (17)$$

$$\sqrt[t]{x^s} = x^{\frac{s}{t}} \quad (18)$$

# Linie

## Hældningskoefficient for linie



Linien, der går gennem punkterne  $A(-1,2)$  og  $B(3,0)$  har hældningskoefficienten

$$a = \frac{0-2}{3-(-1)} = -\frac{1}{2}$$

En linie, der danner en vinkel på  $120^\circ$  med 1. akse, har hældningskoefficienten

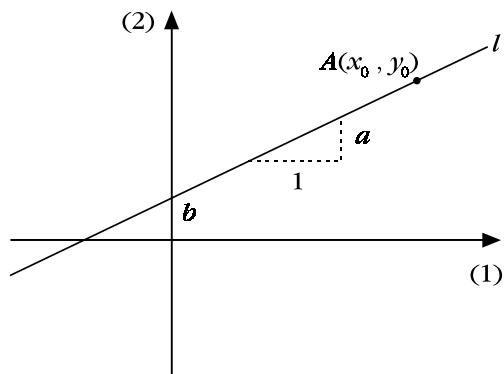
$$a = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

Hældningskoefficient (stigningstal)  $a$  for linien  $l$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (19)$$

$$a = \tan v \quad (20)$$

## Ligning for linie



Linien gennem 6 på 2. akse med hældningskoefficienten  $-2$  har ligningen

$$y = -2x + 6$$

Linien gennem  $A(-1, 2)$  med hældningskoefficienten  $-\frac{1}{2}$  har en ligning bestemt ved

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - (-1))$$

$\Leftrightarrow$

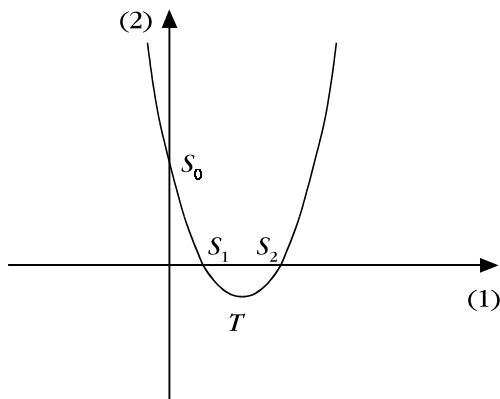
$$y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

Ligning for linien  $l$

$$y = ax + b \tag{21}$$

$$y - y_0 = a(x - x_0) \tag{22}$$

# Parabel



En parabel har ligningen

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

$$d = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) = 9$$

$$T = \left( \frac{-(-1)}{2 \cdot \frac{1}{2}}, \frac{-9}{4 \cdot \frac{1}{2}} \right) = (1, -4\frac{1}{2})$$

$$S_1 = \left( \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot \frac{1}{2}}, 0 \right) = (-2, 0)$$

$$S_2 = \left( \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot \frac{1}{2}}, 0 \right) = (4, 0)$$

$$S_0 = (0, -4)$$

**Ligning for parabel med symmetriakse parallel med andenaksen**

$$y = ax^2 + bx + c \quad (23)$$

**Diskriminant  $d$**

$$d = b^2 - 4ac \quad (24)$$

**Toppunkt  $T$**

$$T = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a} \right) \quad (25)$$

**Skæringspunkter  $S_1$  og  $S_2$  med førsteaksen**

$$S_1 = \left( \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, 0 \right) \quad (26)$$

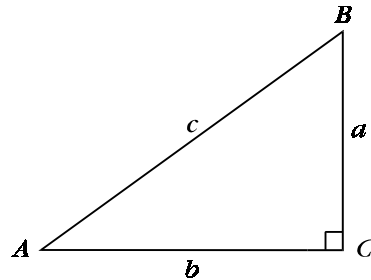
$$S_2 = \left( \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}, 0 \right)$$

**Skæringspunkt  $S_0$  med andenaksen**

$$S_0 = (0, c) \quad (27)$$

# Trekant

## Retvinklet trekant



I en retvinklet trekant  $ABC$  med  $\angle C = 90^\circ$ ,  $a = 5$  og  $b = 12$  er  $c$  bestemt ved

$$5^2 + 12^2 = c^2$$
$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (28)$$

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad (29)$$

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \quad (30)$$

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

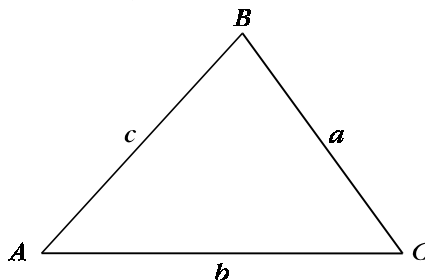
Vinkel  $A$  er bestemt ved

$$\tan A = \frac{5}{12} = 0,4167$$
$$\angle A = 22,6^\circ$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \quad (31)$$

$$\tan B = \frac{b}{a}$$

## Vilkårlig trekant



I en trekant  $ABC$   
med  $a = 5$ ,  $b = 9$  og  $c = 6$   
er vinkel  $C$  bestemt ved

$$\begin{aligned}6^2 &= 5^2 + 9^2 - 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cos C \\ \Leftrightarrow \\ \cos C &= \frac{5^2 + 9^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 9} = 0,7778 \\ \angle C &= 38,9^\circ\end{aligned}$$

I en trekant  $ABC$  med  
 $\angle A = 40^\circ$ ,  $\angle B = 80^\circ$  og  $b = 5$   
er  $a$  bestemt ved

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin 40^\circ} &= \frac{5}{\sin 80^\circ} \\ \Leftrightarrow \\ a &= \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = 3,26\end{aligned}$$

En trekant  $ABC$  med  
 $\angle C = 40^\circ$ ,  $a = 5$  og  $b = 7$   
har arealet

$$T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 40^\circ = 11,25$$

## Cosinusrelationerne

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A\end{aligned} \tag{32}$$

## Sinusrelationerne

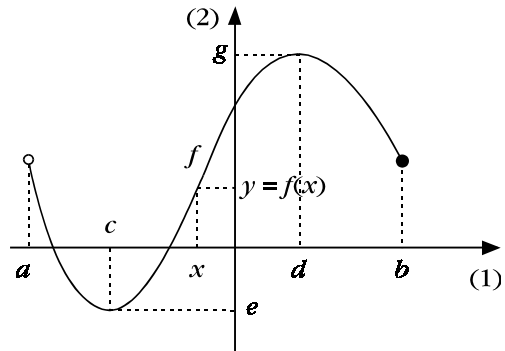
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{33}$$

## Areal $T$ af trekant

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ T &= \frac{1}{2} bc \sin A \\ T &= \frac{1}{2} ac \sin B\end{aligned} \tag{34}$$

# Funktion

## Funktionsbegrebet



Figuren viser grafen for en funktion  $f$ .

### Definitionsmængden for $f$

Definitionsmængden for  $f$  er grafens udstrækning målt på 1. akse (35)

$$\text{Dm}(f) = ]a; b]$$

### Værdimængden for $f$

Værdimængden for  $f$  er grafens udstrækning målt på 2. akse (36)

$$\text{Vm}(f) = [e; g]$$

### Funktionsværdi $y = f(x)$

$f(x)$  er andenkoordinaten til det punkt på grafen, som har førstekoordinaten  $x$  (37)

### Monotoniintervallerne for $f$

$f$  er aftagende i  $]a; c]$

$f$  er voksende i  $[c; d]$  (38)

$f$  er aftagende i  $[d; b]$

$$f(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = x + 1$$

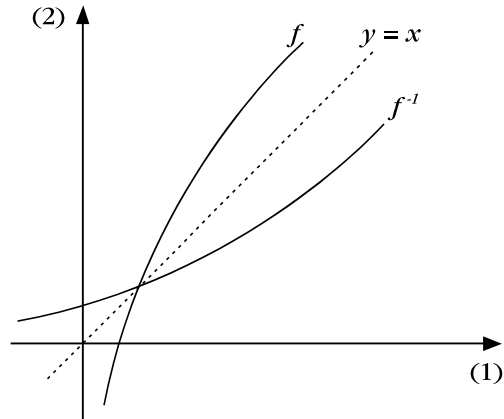
$$(f \circ g)(x) = 2(x + 1) - 3 = 2x - 1$$

## Sammensat funktion

Den sammensatte funktion  $f \circ g$  af to funktioner  $f$  og  $g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad (39)$$

## Omvendt funktion



Den omvendte funktion  $f^{-1}$  til en funktion  $f$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad (40)$$

$$f(x) = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + 1\frac{1}{2}$$

Med  $x$  som uafhængig variabel er en forskrift for  $f^{-1}$

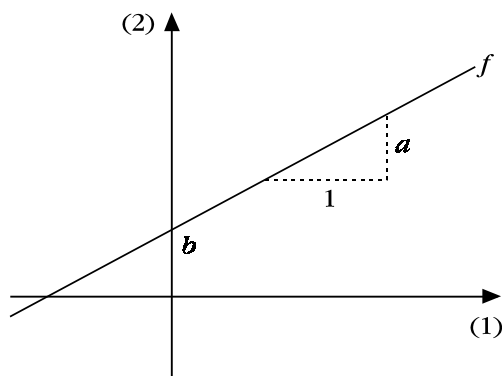
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

# Polynomier

## Lineær funktion

$$f(x) = ax + b$$

(41)



Grafen for  $f$  er en ret linie i et sædvanligt koordinatsystem.

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

$$d = 64$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$$

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$$

De mulige rationale nulpunkter er

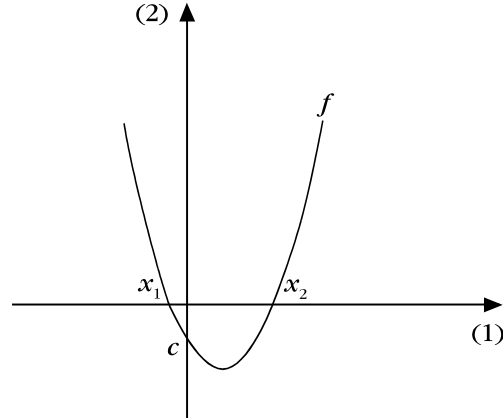
$$\frac{p}{q} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4}{\pm 1, \pm 2} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}$$

Da 1 er et nulpunkt i  $f$ ,  
går  $(x-1)$  op i  $f(x)$  og

$$(2x^3 - x^2 + 3x - 4) : (x-1) = 2x^2 + x + 4$$

## Andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (42)$$



Grafen for  $f$  er en parabel.

### Diskriminant $d$

$$d = b^2 - 4ac \quad (43)$$

### Nulpunkter (rødder) $x_1$ og $x_2$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \quad (44)$$

### Faktorisering

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (45)$$

## Polynomium af grad $n$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (46)$$

### Mulig rational nulpunkt (rod) $\frac{p}{q}$ i et polynomium med heltallige koefficienter

$$p \text{ går op i } a_0 \text{ og } q \text{ går op i } a_n \quad (47)$$

### Division med $(x-t)$

$t$  er nulpunkt i  $f$

$$\Leftrightarrow (x-t) \text{ går op i } f(x) \quad (48)$$

# Asymptote for polynomiumsbrøk

$$f(x) = \frac{x-2}{3x^2+5}$$

Da tællergrad < nævnergrad er  $y = 0$  en vandret asymptote

$$f(x) = \frac{4x^2-2}{3x^2+5}$$

Da tællergrad = nævnergrad er

$y = \frac{4}{3}$  en vandret asymptote

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x+4}$$

Da tællergrad er én større end nævnergrad er

$y = \frac{1}{2}x - 1$  en skrå asymptote,

idet  $f(x) = \frac{x^2-3}{2x+4} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2x+4}$

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x+4}$$

Da  $-2$  er nævnerpunkt men ikke tællerpunkt er

$x = -2$  en lodret asymptote

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad (49)$$

## Vandret asymptote

Hvis tællergrad < nævnergrad, så er  $y = 0$  en vandret asymptote (50)

Hvis tællergrad = nævnergrad, så er (51)

$y = \frac{a_n}{b_n}$  en vandret asymptote, hvor

$$g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \text{ og}$$

$$h(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

## Skrå asymptote

Hvis tællergrad = nævnergrad + 1, så er (52)

$y = ax + b$  en skrå asymptote,

hvor  $f(x) = ax + b + \frac{r(x)}{h(x)}$ , og graden af  $r$  er mindre end graden af  $h$

## Lodret asymptote

Hvis  $k$  er nulpunkt i nævner men ikke i tæller, så er (53)

$x = k$  en lodret asymptote

# Ekspontielle funktioner

## Ekspontialfunktion med grundtal $a$

$$f(x) = a^x \quad (54)$$

## Den naturlige eksponentialfunktion

$$f(x) = e^x \quad (55)$$

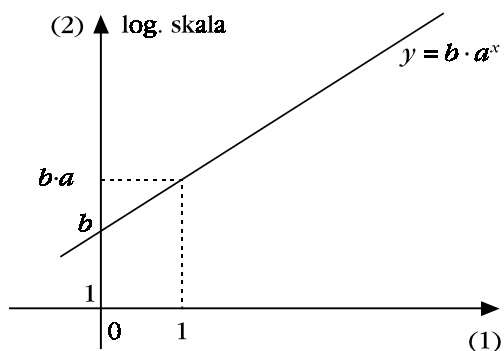
## Ekspontielt voksende/aftagende funktion

Fremskrivningsfaktor  $a$

Relativ tilvækst  $r$

Begyndelsesværdi  $b$

$$f(x) = ba^x = b(1+r)^x \quad (56)$$



Grafen er en ret linie i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

En eksponentiel funktion

$f(x) = ba^x$  er fastlagt ved  $f(1) = 120$

og  $f(4) = 405$ .

Fremskrivningsfaktoren er

$$a = \sqrt[4-1]{\frac{405}{120}} = 1,5$$

En eksponentiel funktion

$f(x) = ba^x$  er fastlagt ved  $a = 1,5$

og  $f(4) = 405$ .

Begyndelsværdien er

$$b = 405 \cdot 1,5^{-4} = 80$$

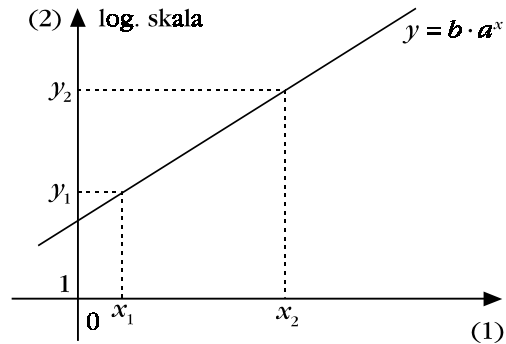
Fordoblingskonstanten for

$f(x) = 80 \cdot 1,5^x$  er

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln(1,5)} = 1,71$$

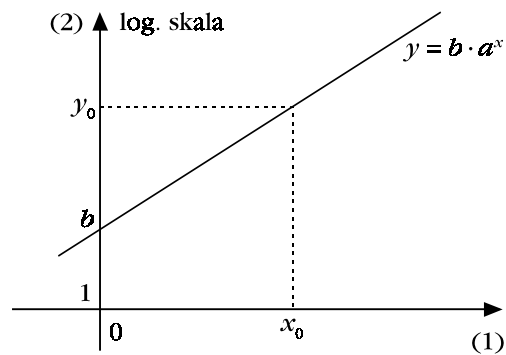
$$2 \cdot 3^x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{10}{2}\right)}{\ln 3} = 1,465$$

### Fremskrivningsfaktor $a$



$$a = x_2 - x_1 \sqrt{\frac{y_2}{y_1}} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} \quad (57)$$

### Begyndelsværdi $b$



$$b = y_0 a^{-x_0} \quad (58)$$

### Fordoblingskonstant $T_2$

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a} \quad (59)$$

### Halveringskonstant $T_{\frac{1}{2}}$

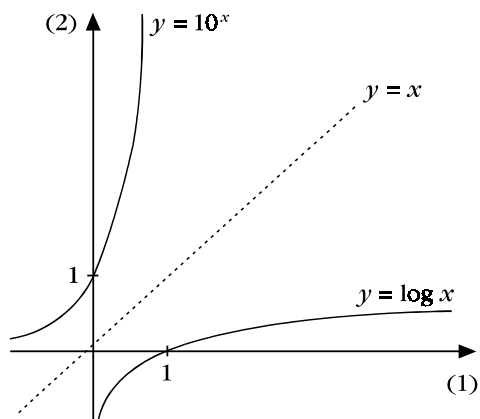
$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln a} \quad (60)$$

### Eksponentiel ligning

$$ba^x = y \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{y}{b}\right)}{\ln a} = \frac{\ln y - \ln b}{\ln a} \quad (61)$$

# Logaritmefunktioner

## Logaritmefunktionen med grundtal 10, log



### Regneregler

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log y \quad (62)$$

$$x = 10^{\log x} = \log(10^x) \quad (63)$$

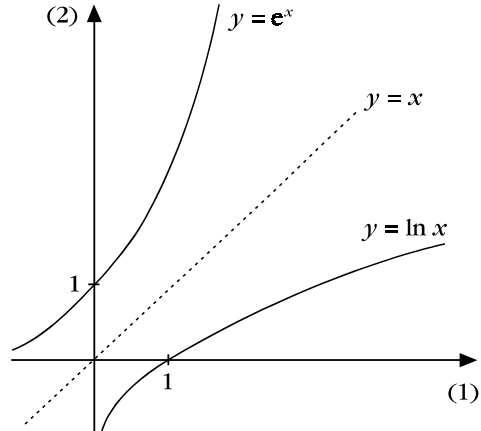
$$\log 10 = 1 \quad (64)$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad (65)$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \quad (66)$$

$$\log(a^x) = x \cdot \log a \quad (67)$$

## Den naturlige logaritmefunktion ln



### Regneregler

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \quad (68)$$

$$x = e^{\ln x} = \ln(e^x) \quad (69)$$

$$\ln e = 1 \quad (70)$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad (71)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad (72)$$

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln a \quad (73)$$

### Sammenhæng mellem log og ln

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad (74)$$

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} \quad (75)$$

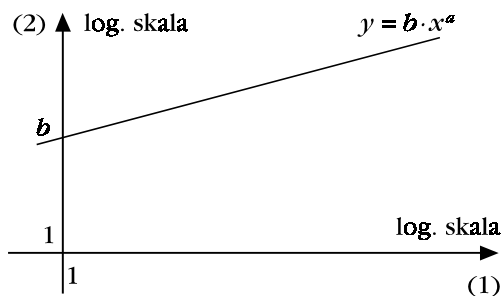
# Potensfunktioner

## Potensfunktion med eksponent $a$

$$f(x) = x^a \quad (76)$$

## Funktion der er proportional med potensfunktion

$$f(x) = bx^a \quad (77)$$



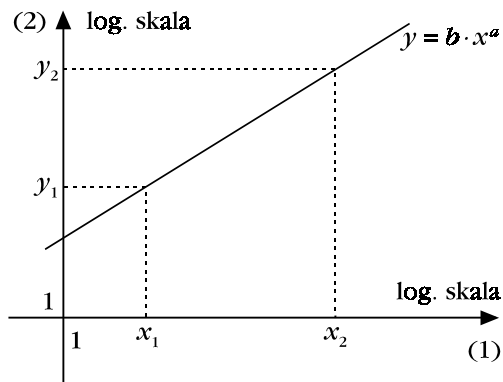
Grafen er en ret linie i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

En potensfunktion  $f(x) = bx^a$  er fastlagt ved  $f(2) = 6$  og  $f(8) = 96$ .

Eksponenten er

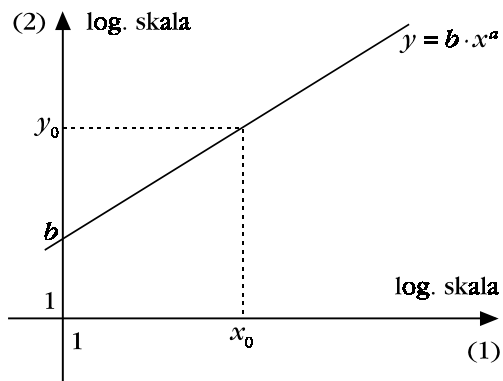
$$a = \frac{\ln\left(\frac{96}{6}\right)}{\ln\left(\frac{8}{2}\right)} = 2$$

### Eksponent $a$



$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \quad (78)$$

### Bestemmelse af $b$



En potensfunktion  $f(x) = bx^a$  er fastlagt ved  $a = 2$  og  $f(8) = 96$ .  $b$  er

$$b = 96 \cdot 8^{-2} = 1,5$$

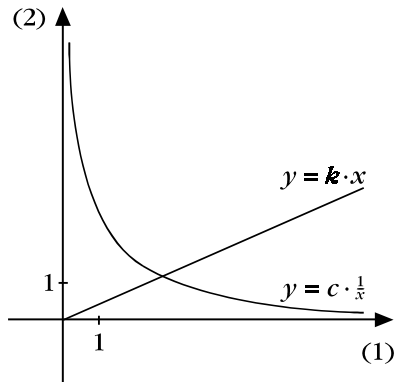
$$b = y_0 x_0^{-a} \quad (79)$$

### Potensligning

$$2x^3 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{10}{2}} = 1,710$$

$$bx^a = y \Leftrightarrow x = \sqrt[a]{\frac{y}{b}} = \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{a}} \quad (80)$$

## Proportionalitet



### Ligfrem proportionalitet

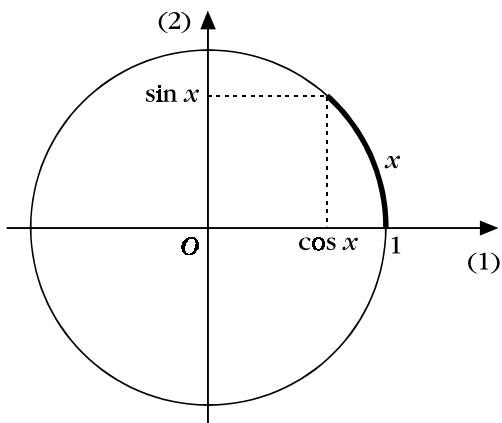
$$y = k \cdot x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k \quad (81)$$

### Omvendt proportionalitet

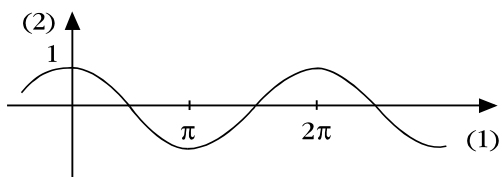
$$y = c \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \cdot y = c \quad (82)$$

# Trigonometriske funktioner

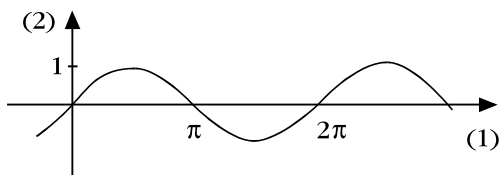
## Cosinus og sinus



### Graf for cos



### Graf for sin



$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos x$	1	0	-1	0	1

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin x$	0	1	0	-1	0

### Regneregler

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \quad (83)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (84)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

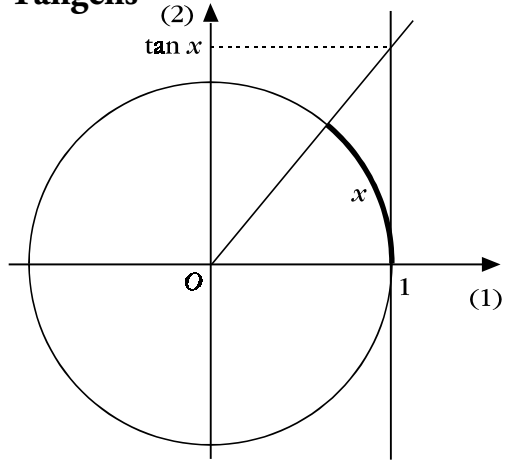
$$\cos(-x) = \cos x \quad (85)$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad (86)$$

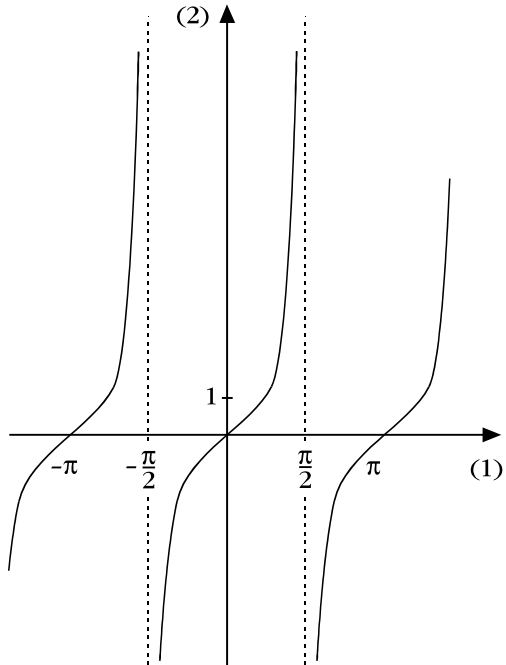
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

# Tangens



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (87)$$

## Graf for tan



$x$	$-\frac{\pi}{4}$	$0$	$\frac{\pi}{4}$
$\tan x$	$-1$	$0$	$1$

## Regneregler

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad (88)$$

$$\tan(-x) = -\tan x \quad (89)$$

## Specielle funktionsværdier

Grader	0°	30°	45°	60°	90°
Radiantal	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

(90)

$$\cos x = 0,2$$

$$x = \pm 1,3694 + p \cdot 2\pi \quad , \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0,6$$

$$x = \begin{cases} 0,6435 + p \cdot 2\pi \\ \pi - 0,6435 + p \cdot 2\pi \end{cases} \quad p \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow$

$$x = \begin{cases} 0,6435 + p \cdot 2\pi \\ 2,4981 + p \cdot 2\pi \end{cases} \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = 1,4$$

$$x = 0,9505 + p \cdot \pi \quad , \quad p \in \mathbb{Z}$$

## Trigonometriske grundligninger

$$\cos x = a \quad (91)$$

$$\sin x = a \quad (92)$$

$$\tan x = a \quad (93)$$

$$f(x) = 3 \cdot \cos(4x + 1) + 5$$

$$f(x) = 3 \cdot \sin(4x + 1) + 5$$

Perioden for

$$f(x) = 3 \cdot \sin(4x + 1) + 5 \text{ er}$$

$$p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

## Harmonisk svingning

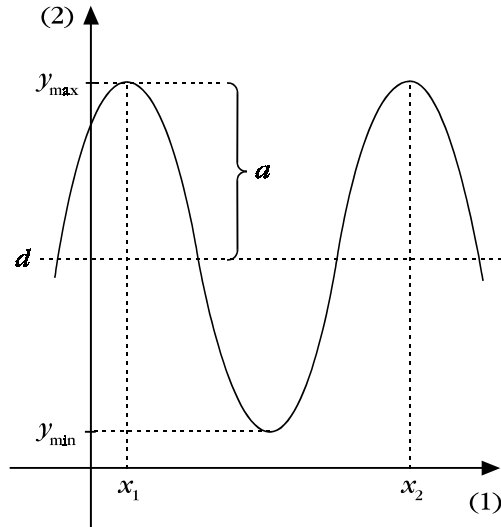
$$f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d \quad (94)$$

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d \quad (95)$$

Periode  $p$

$$p = \frac{2\pi}{b} \quad (96)$$

Graf for harmonisk svingning



$$p = x_2 - x_1 \quad (97)$$

$$a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \quad (98)$$

$$d = y_{\max} - a \quad (99)$$

# Lineær funktion i to variable

$$f(x, y) = x + 2y - 3$$

$$N(t): x + 2y - 3 = t$$

$\Leftrightarrow$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{t+3}{2}$$

$$N(2): x + 2y - 3 = 2$$

$\Leftrightarrow$

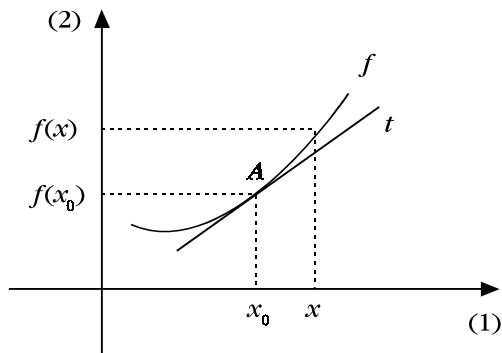
$$y = -\frac{1}{2}x + 2,5$$

$$f(x, y) = ax + by + c \quad (100)$$

**Niveaulinie  $N(t)$**

$$N(t): ax + by + c = t \quad (101)$$

# Differentialregning



**Differentialkvotient  $f'(x_0)$**

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (102)$$

En ligning for tangenten til grafen for funktionen

$f(x) = x^2 + x + 3$  i  $A(1, f(1))$  er bestemt ved

$$y = 3(x - 1) + 5$$

$\Leftrightarrow$

$$y = 3x + 2$$

Det approksimerende første-gradspolynomium for funktionen

$f(x) = x^2 + x + 3$  i tallet 1

har en forskrift, der er bestemt ved

$$p(x) = 3(x - 1) + 5$$

$\Leftrightarrow$

$$p(x) = 3x + 2$$

**Ligning for tangent  $t$  i  $A(x_0, f(x_0))$**

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (103)$$

**Approksimerende første-gradspolynomium  $p$  for  $f$  i tallet  $x_0$**

$$p(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (104)$$

## Differentiation af specielle funktioner

Funktion $f(x)$	Afledet funktion $f'(x)$
5	0
$x^3$	$3 \cdot x^2$
$3^x$	$\ln 3 \cdot 3^x$
$e^{3x}$	$3e^{3x}$

Funktion $f(x)$	Afledet funktion $f'(x)$
$k$ (konstant)	0
$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$a^x$	$\ln a \cdot a^x$
$e^x$	$e^x$
$e^{kx}$	$k \cdot e^{kx}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$

(105)

## Regneregler for differentiation

$$(x^2 \pm 3x)' = 2x \pm 3$$

$$(x \cdot \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$(3 \cdot \sin x)' = 3 \cdot \cos x$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{2 \cdot (x-1) - (2x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$((2x+1)^3)' = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$$

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) \quad (106)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (107)$$

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x) \quad (108)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad (109)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (110)$$

# Deskriptiv statistik

Gennemsnittet af karaktererne 10, 9, 11, 9, 8, 6, 7, 8 opnået af 8 elever er

$$\bar{x} = \frac{10+9+11+9+8+6+7+8}{8} = 8,5$$

I en forretning har man i 60 på hinanden følgende dage registreret antal kunder i den første åbningstime. Fordelingen af antal kunder i denne time og en analyse samt illustration af denne fordeling er vist i det følgende.

Antal kunder $x_i$	Hyppighed $h_i$	Frekvens $f_i$
1	6	0,1
2	18	0,3
3	12	0,2
4	24	0,4
i alt	$n = 60$	1,0

Det gennemsnitlige antal kunder er

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 24}{60} = 2,9$$

$$\bar{x} = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,4 = 2,9$$

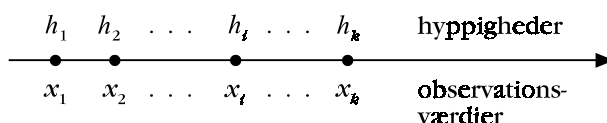
Antal observationer  $n$

Observationer  $x_1, x_2, \dots, x_n$

Middeltal (gennemsnit)  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (111)$$

## Diskrete observationer



Antal observationsværdier  $k$

Observationsværdier  $x_1, x_2, \dots, x_k$

Hyppigheder  $h_1, h_2, \dots, h_k$

Antal observationer  $n$

$$n = \sum_{i=1}^k h_i \quad (112)$$

Frekvenser  $f_1, f_2, \dots, f_k$

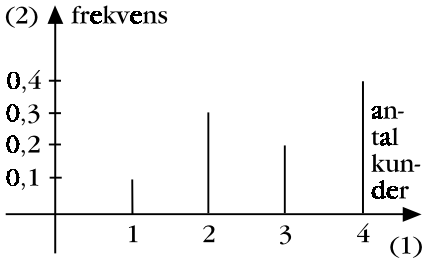
$$f_i = \frac{h_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (113)$$

Middeltal (gennemsnit)  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot h_i}{n} \quad (114)$$

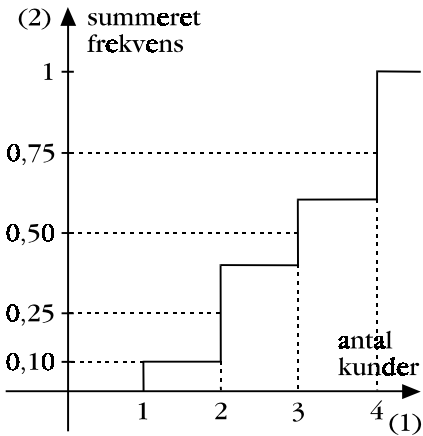
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i \quad (115)$$

Pindediagram for fordelingen af antal kunder.



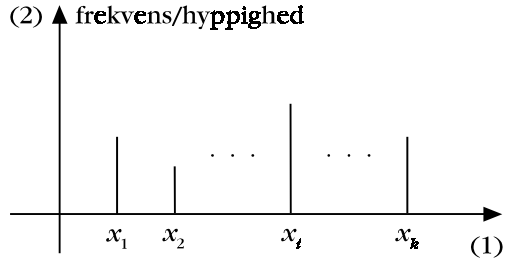
Antal kunder $x_i$	Frekvens $f_i$	Summeret frekvens $F_i$
1	0,1	0,1
2	0,3	0,4
3	0,2	0,6
4	0,4	1,0

Trappediagram for fordelingen af antal kunder.



- 0,10 – fraktil = 1
- 1. kvartil = 2
- 2. kvartil = median = 3
- 3. kvartil = 4

### Pindediagram



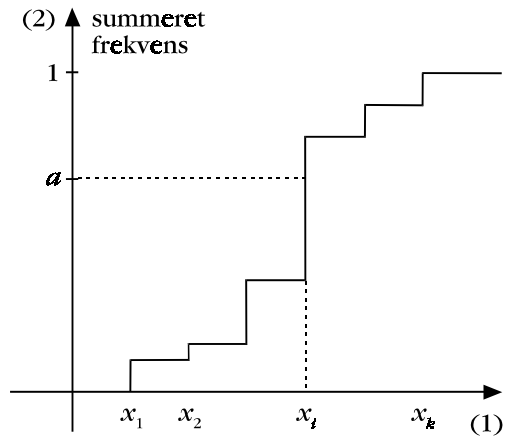
Højde af pind svarer til frekvens/hyppighed af observationsværdi.

### Summerede frekvenser

$$F_1, F_2, \dots, F_k$$

$$F_i = \sum_{j=1}^i f_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (116)$$

### Trappediagram



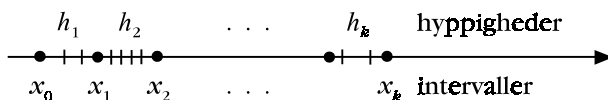
$$a - \text{fraktil} = x_i \quad (117)$$

$$1. \text{ kvartil} = 0,25 - \text{fraktil} \quad (118)$$

$$2. \text{ kvartil} = \text{median} = 0,5 - \text{fraktil} \quad (119)$$

$$3. \text{ kvartil} = 0,75 - \text{fraktil} \quad (120)$$

## Grupperede observationer



På en skole har man for 80 elever registreret antal timer, som eleven var om at lave en afleveringsopgave i matematik. Fordelingen af antal timer til at lave afleveringsopgaven og en analyse samt illustration af denne fordeling er vist i det følgende.

Antal timer grupperet i intervaller $]x_{i-1}; x_i]$	Intervalmidtpunkt $m_i$	Antal elever $h_i$	Intervalfrekvens $f_i$
$]0,5;1,5]$	1	8	0,1
$]1,5;2,5]$	2	40	0,5
$]2,5;3,5]$	3	24	0,3
$]3,5;4,5]$	4	8	0,1
i alt		$n = 80$	1,0

Det gennemsnitlige antal timer er

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 8}{80} = 2,4$$

$$\bar{x} = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 = 2,4$$

Antal intervaller  $k$

Intervaller  $]x_0; x_1], ]x_1; x_2], \dots, ]x_{k-1}; x_k]$

Hyppigheder  $h_1, h_2, \dots, h_k$

Intervalmidtpunkter  $m_1, m_2, \dots, m_k$

$$m_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (121)$$

Antal observationer  $n$

$$n = \sum_{i=1}^k h_i \quad (122)$$

Intervalfrekvenser  $f_1, f_2, \dots, f_k$

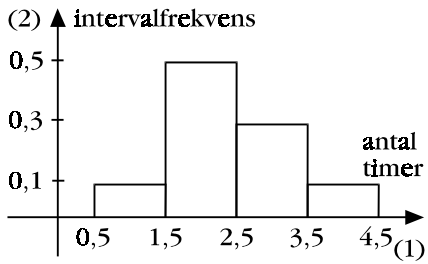
$$f_i = \frac{h_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (123)$$

Middeltal (gennemsnit)  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \cdot h_i}{n} \quad (124)$$

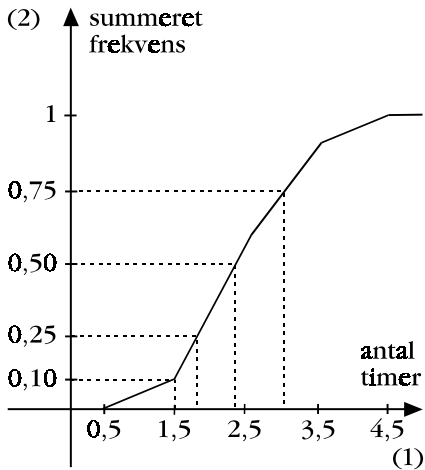
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot f_i \quad (125)$$

Søjlediagram for fordelingen af antal timer.



Antal timer grupperet i intervaller $]x_{i-1}; x_i]$	Interval-frekvens $f_i$	Summeret frekvens $F_i$
$]0,5;1,5]$	0,1	0,1
$]1,5;2,5]$	0,5	0,6
$]2,5;3,5]$	0,3	0,9
$]3,5;4,5]$	0,1	1,0

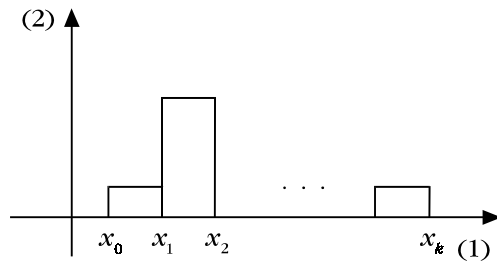
Sumkurve for fordelingen af antal timer.



0,10 – fraktil = 1,5

1. kvartil = 1,8
2. kvartil = median = 2,3
3. kvartil = 3

Søjlediagram (histogram)



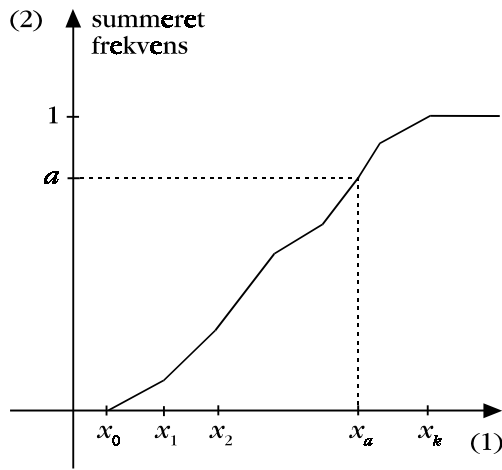
Areal af rektangel svarer til intervalfrekvens/hypighed.

Summerede frekvenser

$$F_1, F_2, \dots, F_k$$

$$F_i = \sum_{j=1}^i f_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (126)$$

Sumkurve



$$a - \text{fraktil} = x_a \quad (127)$$

$$1. \text{ kvartil} = 0,25 - \text{fraktil} \quad (128)$$

$$2. \text{ kvartil} = \text{median} = 0,5 - \text{fraktil} \quad (129)$$

$$3. \text{ kvartil} = 0,75 - \text{fraktil} \quad (130)$$

# Sandsynlighedsregning

Et stokastisk eksperiment er beskrevet ved

$u$	1	2	3	4
$P(u)$	0,2	0,1	0,5	0,2

Sandsynligheden for hændelsen

$A = \{3,4\}$  er

$$P(A) = P(3) + P(4) = 0,5 + 0,2 = 0,7$$

I et sandsynlighedsfelt  $(U, P)$  har hændelsen  $A$  sandsynlighed

$$P(A) = 0,25$$

Sandsynligheden for den komplementære hændelse er

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

Antal udfald  $n$

Udfald  $u_1, u_2, \dots, u_n$

Udfaldsrum  $U$

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (131)$$

Sandsynlighedsfunktion  $P$

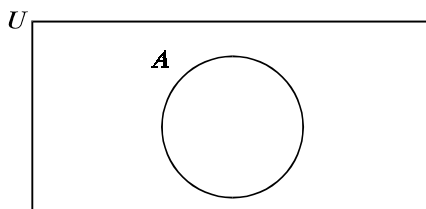
$$0 \leq P(u_i) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (132)$$

$$\sum_{i=1}^n P(u_i) = 1$$

Sandsynlighed  $P(A)$  for en hændelse  $A$

$$P(A) \text{ er lig med summen af sandsynlighederne af alle udfald i } A \quad (133)$$

## Regneregler for sandsynligheder



Udfaldsrum  $U$

Hændelse  $A$

$$P(U) = 1 \quad (134)$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (135)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (136)$$

# Stokastisk variabel

Sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel  $X$  er

$x$	2	5	7
$P(X = x)$	0,4	0,5	0,1

Fordelingsfunktionen for  $X$  er

$x$	2	5	7
$F(x)$	0,4	0,9	1,0

Middelværdien af  $X$  er

$$E(X) = 2 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,1 = 4$$

Variansen af  $X$  er

$$\text{Var}(X) = (2 - 4)^2 \cdot 0,4 + (5 - 4)^2 \cdot 0,5 + (7 - 4)^2 \cdot 0,1 = 3$$

$$\text{Var}(X) = 2^2 \cdot 0,4 + 5^2 \cdot 0,5 + 7^2 \cdot 0,1 - 4^2 = 3$$

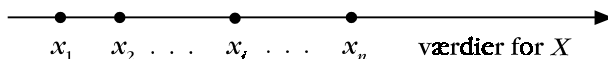
Standardafvigelsen af  $X$  er

$$\sigma(X) = \sqrt{3} = 1,73$$

**Fordelingsfunktion  $F$  for en stokastisk variabel  $X$**

$$F(x) = P(X \leq x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (137)$$

**Diskret stokastisk variabel  $X$**



Antal værdier  $n$

Værdier  $x_1, x_2, \dots, x_n$

**Sandsynlighedsfunktion  $f$**

$$f(x_i) = P(X = x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (138)$$

**Fordelingsfunktion  $F$**

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^i f(x_j) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (139)$$

**Middelværdi  $\mu$**

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) \quad (140)$$

**Varians  $\sigma^2$**

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \quad (141)$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (142)$$

**Standardafvigelse  $\sigma$**

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (143)$$

# Binomialfordeling

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$K(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Lad  $X$  betegne antal defekte enheder i en stikprøve på 50, som stammer fra en produktion, hvoraf 14% af enhederne er defekte.

Det antages

$$X \sim b(50; 0,14)$$

Sandsynligheden for at stikprøven indeholder 2 defekte er

$$P(X = 2) = K(50, 2) \cdot 0,14^2 \cdot (1 - 0,14)^{50-2} = 0,0172$$

Det forventede antal defekte i stikprøven er

$$E(X) = 50 \cdot 0,14 = 7$$

Variansen af antal defekte er

$$\text{Var}(X) = 50 \cdot 0,14 \cdot (1 - 0,14) = 6,02$$

Standardafvigelsen af antal defekte er

$$\sigma(X) = \sqrt{50 \cdot 0,14 \cdot (1 - 0,14)} = 2,45$$

**$n$  fakultet  $n!$**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (144)$$

$$0! = 1 \quad (145)$$

**Binomialkoefficient  $K(n, r)$**

$$K(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (146)$$

## Binomialfordelt stokastisk variabel $X$

Antalsparameter  $n$

Sandsynlighedsparameter  $p$

Værdier  $0, 1, 2, \dots, n$

$$X \sim b(n, p) \quad (147)$$

**Sandsynlighedsfunktion**

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r} \quad (148)$$

**Middelværdi**

$$E(X) = n \cdot p \quad (149)$$

**Varians**

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) \quad (150)$$

**Standardafvigelse**

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \quad (151)$$

# Normalfordeling

Lad  $X$  betegne det antal km, en bestemt bilmodel kører på 1 liter benzin. Det antages

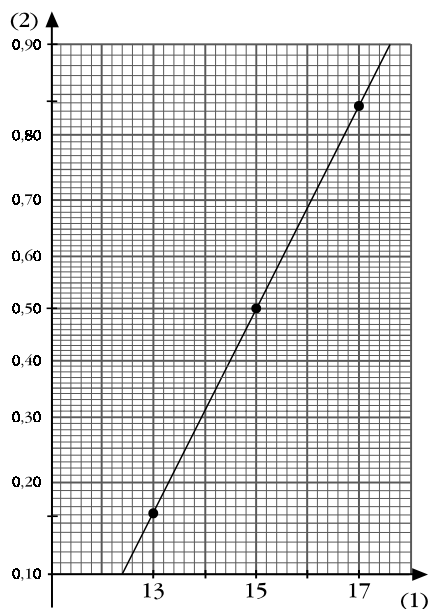
$$X \sim N(15, 2)$$

Grafen for fordelingsfunktionen  $F$  på normalfordelingspapir går gennem punkterne

$$(15 - 2; 0,159) = (13; 0,159),$$

$$(15; 0,5) \quad \text{og}$$

$$(15 + 2; 0,841) = (17; 0,841)$$



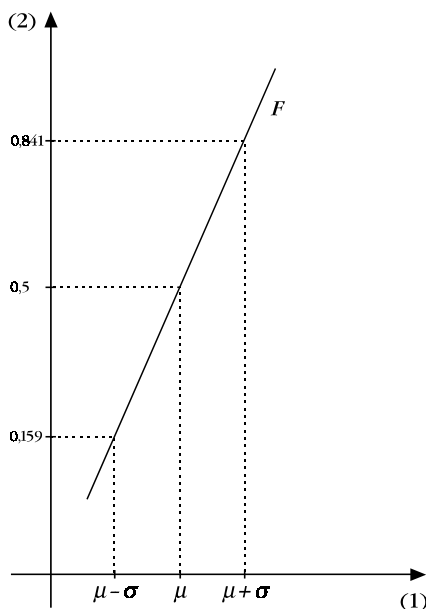
## Normalfordelt stokastisk variabel $X$

Middelværdi  $\mu$

Standardafvigelse  $\sigma$

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

(152)



Grafen for fordelingsfunktionen  $F$  er en ret linie på normalfordelingspapir.

Sandsynligheden for at en bil af denne model kører højst 14 km på 1 liter benzin er

$$P(X \leq 14) = F(14) = 0,31$$

Sandsynligheden for at den kører mindst 14 km på 1 liter benzin er

$$P(X \geq 14) = 1 - F(14) = 1 - 0,31 = 0,69$$

Og sandsynligheden for at den kører mellem 14 km og 16 km på 1 liter benzin er

$$\begin{aligned} P(14 \leq X \leq 16) &= F(16) - F(14) \\ &= 0,69 - 0,31 = 0,38 \end{aligned}$$

### Beregning af intervalsandsynligheder

$$P(X \leq a) = F(a) \quad (153)$$

$$P(X \geq a) = 1 - F(a) \quad (154)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \quad , \quad a < b \quad (155)$$



# Vektorer i planen

$$\vec{a} = 5 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

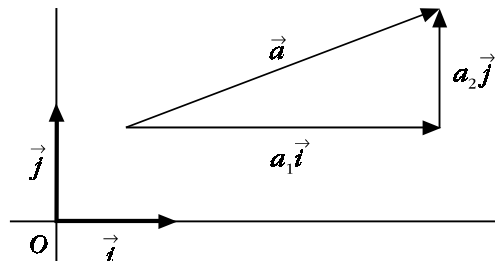
$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

For  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$  ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  og

$t = 2$  gælder følgende

$$t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vektor  $\vec{a}$



$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (156)$$

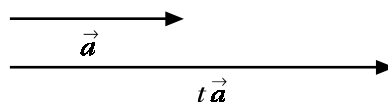
Længde af  $\vec{a}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (157)$$

## Regning med vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{og } t \text{ er et tal}$$

Vektor  $t \cdot \vec{a}$



$$t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \end{pmatrix} \quad (158)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5+3 \\ -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

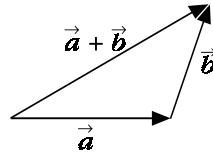
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 = 7$$

$$7 = \sqrt{29} \cdot 5 \cdot \cos v$$

$$v = 74,9^\circ$$

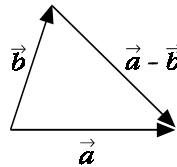
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\sqrt{29})^2 = 29$$

Sum  $\vec{a} + \vec{b}$



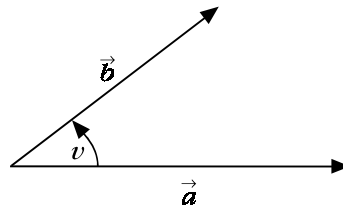
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad (159)$$

Differens  $\vec{a} - \vec{b}$



$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \quad (160)$$

Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \quad (161)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v \quad (162)$$

Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{a}$

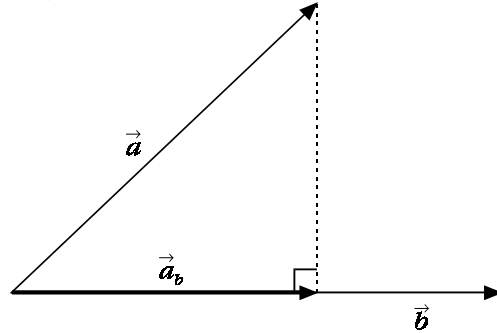
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad (163)$$

Vinkelrette vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (164)$$

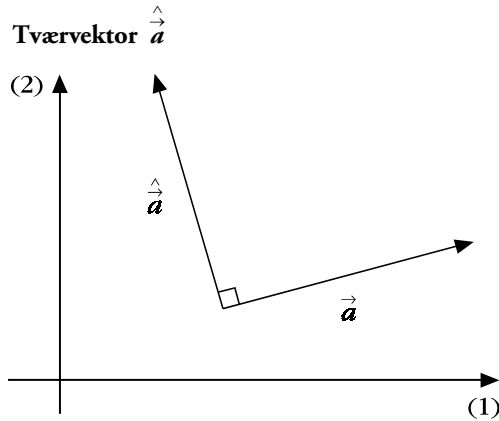
$$\vec{a}_b = \frac{7}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{25} \\ 1\frac{3}{25} \end{pmatrix}$$

Projektion  $\vec{a}_b$  af  $\vec{a}$  på  $\vec{b}$



$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \quad (165)$$

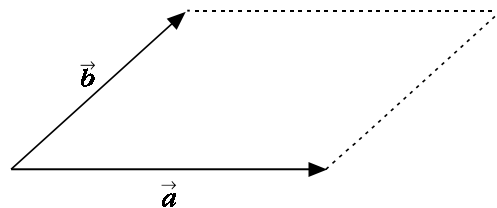
Tværvektor  $\hat{a}$



$$\hat{a} = \begin{pmatrix} -(-2) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (166)$$

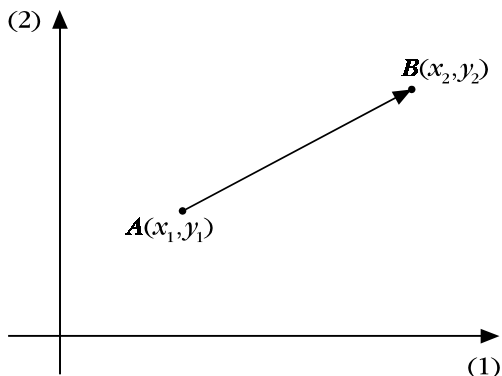
Areal A af det parallelogram, som  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  udspænder



$$A = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 26$$

$$A = |\hat{a} \cdot \vec{b}| \quad (167)$$

## Vektor bestemt ved to punkter i planen



For  $A(3,-5)$  og  $B(6,1)$  gælder, at

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(6-3)^2 + (1-(-5))^2} = \sqrt{45}$$

En trekant  $ABC$ , hvor  $A = (3,2)$ ,  
 $B = (5,6)$  og  $C = (4,-2)$  har arealet

$$T = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 6$$

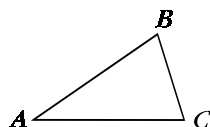
Koordinatsæt for  $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad (168)$$

Længde af  $\vec{AB}$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (169)$$

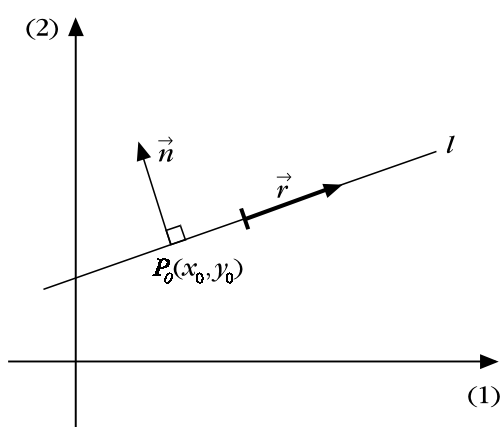
## Areal af trekant



Areal  $T$  af trekant  $ABC$

$$T = \frac{1}{2} \left| \overset{\wedge}{\vec{AB}} \cdot \overset{\wedge}{\vec{AC}} \right| \quad (170)$$

# Linie i planen



Linien gennem  $A(-1,2)$  med normalvektoren  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  har en ligning bestemt ved

$$-2(x - (-1)) + 3(y - 2) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$y = \frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$$

En retningsvektor for linien med ligningen  $y = 2x + 6$  er

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## Ligning for linie

Ligning for linien  $l$  gennem  $P_0(x_0, y_0)$  med normalvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (171)$$

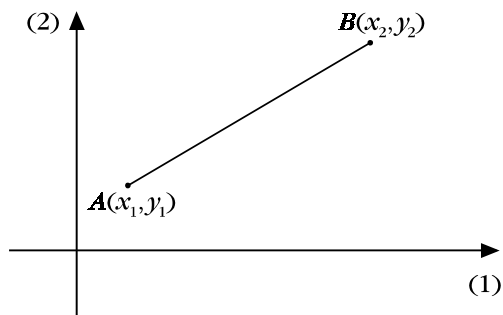
## Retningsvektor for linie

Retningsvektor  $\vec{r}$  for linien  $l$  med ligningen  $y = ax + b$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad (172)$$

# Afstand i planen

## Afstand mellem to punkter



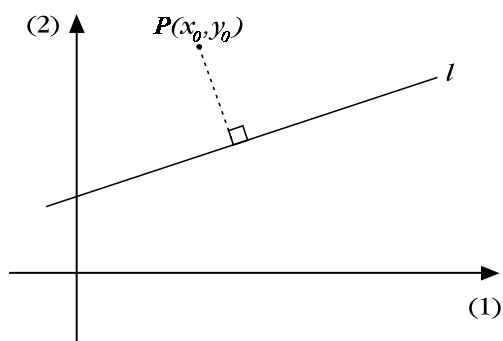
Afstanden mellem  
 $A(3,-5)$  og  $B(6,1)$  er

$$|AB| = \sqrt{(6-3)^2 + (1-(-5))^2} = \sqrt{45}$$

Afstand  $|AB|$  mellem to punkter  
 $A(x_1, y_1)$  og  $B(x_2, y_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (173)$$

## Afstand fra punkt til linie



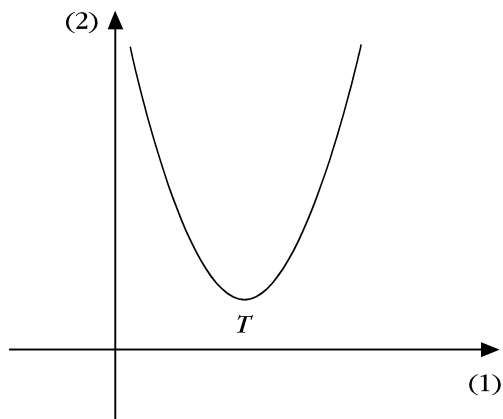
Afstanden fra punktet  $P(2,5)$  til linien  
 $l$  med ligningen  $-x + 2y - 3 = 0$  er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|(-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = 2,24$$

Afstand  $\text{dist}(P, l)$  fra punktet  $P(x_0, y_0)$  til  
linien  $l$  med ligningen  $ax + by + c = 0$

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (174)$$

# Parabel



En parabel har ligningen

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

$$d = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) = 9$$

$$T = \left( \frac{-(-1)}{2 \cdot \frac{1}{2}}, \frac{-9}{4 \cdot \frac{1}{2}} \right) = \left( 1, -4\frac{1}{2} \right)$$

**Ligning for parabel med symmetriakse parallel med andenaksen**

$$y = ax^2 + bx + c \quad (175)$$

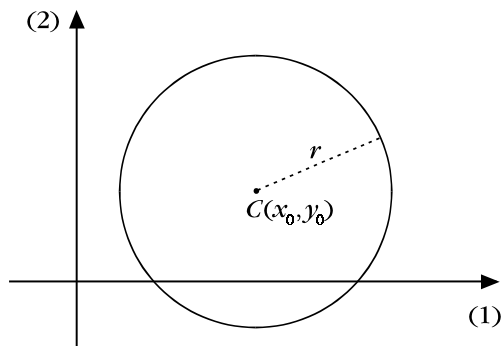
**Diskriminant  $d$**

$$d = b^2 - 4ac \quad (176)$$

**Toppunkt  $T$**

$$T = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a} \right) \quad (177)$$

# Cirkel



En ligning for cirklen med centrum i  $C(2,1)$  og radius 3 er bestemt ved

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$O = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$$

$$A = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

**Ligning for cirkel med centrum i  $C(x_0, y_0)$  og radius  $r$**

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \quad (178)$$

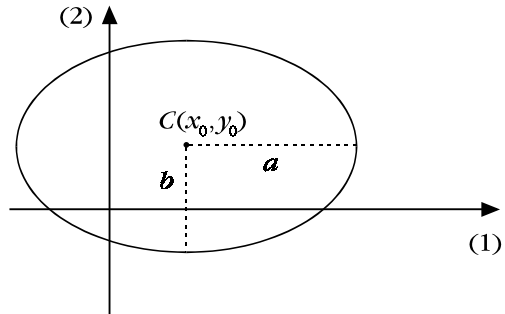
**Omkreds  $O$**

$$O = 2\pi r \quad (179)$$

**Areal  $A$**

$$A = \pi r^2 \quad (180)$$

# Ellipse



En ligning for ellipsen med centrum i  $C(2,1)$  og halvaksler  $a=3$  og  $b=2$  er bestemt ved

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$4x^2 - 16x + 9y^2 - 18y - 11 = 0$$

$$A = \pi \cdot 3 \cdot 2 = 6\pi$$

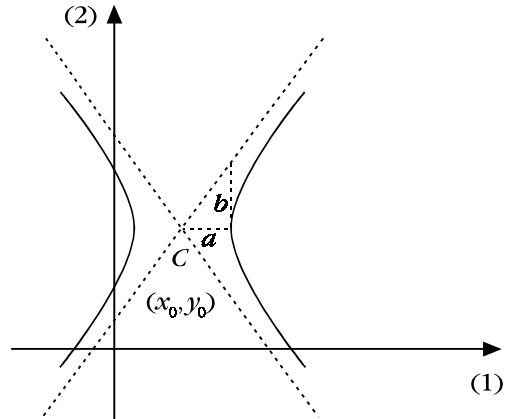
Ligning for ellipse med centrum i  $C(x_0, y_0)$  og halvaksler  $a$  og  $b$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (181)$$

Areal  $A$

$$A = \pi ab \quad (182)$$

# Hyperbel



En ligning for hyperblen med centrum i  $C(2,1)$  og halvaksler  $a=3$  og  $b=2$  er bestemt ved

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$4x^2 - 16x - 9y^2 + 18y - 29 = 0$$

Asymptoterne har ligningerne

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

og

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{1}{3}$$

**Ligning for hyperbel med centrum i  $C(x_0, y_0)$  og halvaksler  $a$  og  $b$**

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (183)$$

**Ligning for asymptoter**

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

og

$$y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \quad (184)$$

# Kvadratisk funktion i to variable

$$f(x, y) = -x^2 + 6x - 2y^2 - 4y - 5$$

$$N(t): -x^2 + 6x - 2y^2 - 4y - 5 = t$$

$\Leftrightarrow$

$$-(x-3)^2 - 2(y+1)^2 + 6 = t$$

$$\frac{(x-3)^2}{6-t} + \frac{(y+1)^2}{3-\frac{1}{2}t} = 1$$

$$N(2): \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$$

$$f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2 + dy + e \quad (185)$$

**Niveaukurve  $N(t)$**

$$N(t): ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = t \quad (186)$$

- en cirkel for  $a = c$
- en ellipse for  $a \cdot c > 0$  og  $a \neq c$
- en hyperbel for  $a \cdot c < 0$

# Integralregning

## Stamfunktion

$F$  er en stamfunktion til  $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$  (187)

## Stamfunktion til specielle funktioner

Funktion $f(x)$	Stamfunktion $\int f(x)dx$
3	$3x$
$x^3$	$\frac{1}{4} \cdot x^4$
$3^x$	$\frac{1}{\ln 3} 3^x$
$e^{3x}$	$\frac{1}{3} e^{3x}$

Funktion $f(x)$	Stamfunktion $\int f(x)dx$
$k$ (konstant)	$kx$
$x^a$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
$a^x$	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$e^x$	$e^x$
$e^{kx}$	$\frac{1}{k} e^{kx}$
$\ln x$	$x \cdot \ln x - x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$1 + (\tan x)^2$	$\tan x$
$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\tan x$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\int (x^2 - 4) dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + c$$

$$\int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + c$$

$$\begin{aligned} \int (e^x) \cdot x dx &= (e^x) \cdot x - \int e^x \cdot 1 dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (2x+1) \cdot e^{x^2+x} dx &= \int e^t dt \\ &= e^t + c = e^{x^2+x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (3x^2 - 4) dx &= [x^3 - 4x]_{-1}^2 \\ &= 2^3 - 4 \cdot 2 - ((-1)^3 - 4 \cdot (-1)) = -3 \end{aligned}$$

## Regneregler for ubestemt integral

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad (189)$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (190)$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (191)$$

### Partiel (delvis) integration

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx \quad (192)$$

### Integration ved substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt, \text{ hvor } t = g(x) \quad (193)$$

## Regneregler for bestemt integral

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (194)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (195)$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (196)$$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (197)$$

### Partiel (delvis) integration (198)

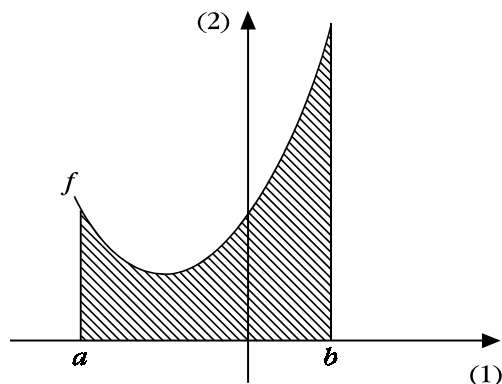
$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x) dx$$

### Integration ved substitution

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt \\ &= F(g(b)) - F(g(a)), \text{ hvor } t = g(x) \end{aligned} \quad (199)$$

## Arealberegning

Areal  $A$  af skraveret område



Arealet af området

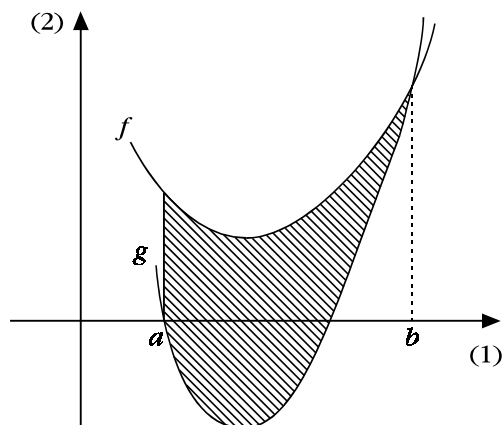
$$\{(x, y) | -2 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 + 2x + 2\}$$

er

$$\int_{-2}^1 (x^2 + 2x + 2) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{1}{3} + 1 + 2 - \left( -\frac{8}{3} + 4 - 4 \right) = 6$$

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (200)$$

Areal  $A$  af skraveret område



Arealet af området

$$\{(x, y) | 1 \leq x \leq 4 \wedge$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq y \leq \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\}$$

er

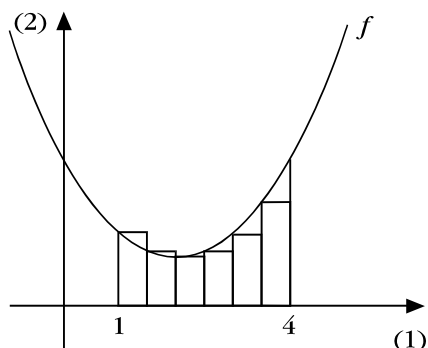
$$\int_1^4 \left( \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 - (x^2 - 4x + 3) \right) dx =$$

$$\int_1^4 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 2x \right) dx = \left[ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 \right]_1^4 =$$

$$-10\frac{2}{3} + 16 - \left( -\frac{1}{6} + 1 \right) = 4\frac{1}{2}$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad (201)$$

# Numerisk integration



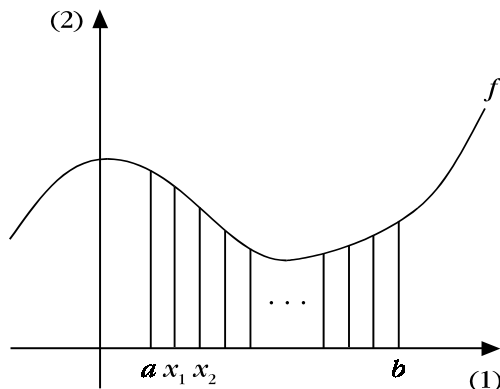
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

Intervall  $[1;4]$  inddeles i 6 lige lange delintervaller

Delintervalllængden er

$$\Delta x = \frac{4-1}{6} = 0,5$$

$$\begin{aligned} V_6 &= 0,5 \cdot (f(1) + f(1,5) + f(2) + \\ &\quad f(2,5) + f(3) + f(3,5)) \\ &= 0,5 \cdot (1,5 + 1,125 + 1 + 1,125 + \\ &\quad 1,5 + 2,125) = 4,1875 \end{aligned}$$



$$\text{Intervall } [a; b] = [x_0; x_n]$$

Antal delintervaller  $n$

Lige lange delintervaller  $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$

Delintervalllængde  $\Delta x$

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (202)$$

**Tilnærmelsessummer for  $\int_a^b f(x) dx$**

**Venstresum  $V_n$**

$$V_n = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad (203)$$

**Højresum  $H_n$**

$$H_n = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (204)$$

**Trapezsum  $T_n$**

$$T_n = \frac{V_n + H_n}{2} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \left( f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) \quad (205)$$

# Differentialligninger

Ligning	Løsning
$\frac{dy}{dx} = x^2$	$y = \frac{1}{3}x^3 + c$
$\frac{dy}{dx} = 2y$	$y = ce^{2x}$
$\frac{dy}{dx} = y(3 - \frac{1}{2}y)$	$y = \frac{6}{1 + ce^{-3x}}$

Ligning	Løsning
$\frac{dy}{dx} = h(x)$	$y = \int h(x)dx$
$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x)dx$
$\frac{dy}{dx} = ky$	$y = ce^{kx}$
$\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$	$y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + ce^{-bx}}$
$\frac{dy}{dx} = ay(M - y)$	$y = \frac{M}{1 + ce^{-aMx}}$

(206)

# Sandsynlighedsregning

Et stokastisk eksperiment er beskrevet ved

$u$	1	2	3	4
$P(u)$	0,2	0,1	0,5	0,2

Sandsynligheden for hændelsen

$A = \{3,4\}$  er

$$P(A) = P(3) + P(4) = 0,5 + 0,2 = 0,7$$

I et sandsynlighedsfelt  $(U,P)$  har hændelsen  $A$  sandsynlighed

$$P(A) = 0,25$$

Sandsynligheden for den komplementære hændelse er

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,25 = 0,75$$

Antal udfald  $n$

Udfald  $u_1, u_2, \dots, u_n$

Udfaldsrum  $U$

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (207)$$

Sandsynlighedsfunktion  $P$

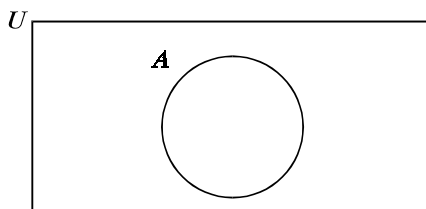
$$0 \leq P(u_i) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (208)$$

$$\sum_{i=1}^n P(u_i) = 1$$

Sandsynlighed  $P(A)$  for en hændelse  $A$

$P(A)$  er lig med summen af sandsynlighederne af alle udfald i  $A$  (209)

## Regneregler for sandsynligheder



Udfaldsrum  $U$

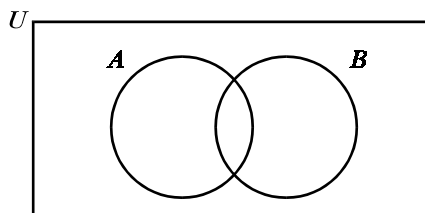
Hændelse  $A$

$$P(U) = 1 \quad (210)$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (211)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (212)$$

I et sandsynlighedsfelt  $(U, P)$  gælder for hændelserne  $A$  og  $B$ , at  
 $P(A) = 0,4$  ,  $P(B) = 0,2$  og  
 $P(A \cap B) = 0,1$



Sandsynligheden for hændelsen enten  $A$  eller  $B$  er  
 $P(A \cup B) = 0,4 + 0,2 - 0,1 = 0,5$

Sandsynligheden for  $A$  givet  $B$  er  
 $P(A|B) = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$

$A$  og  $B$  er ikke uafhængige, da  
 $P(A|B) = 0,5 \neq 0,4 = P(A)$

$$P(B|A) = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,4} = 0,25$$

Udfaldsrum  $U$   
Hændelser  $A$  og  $B$

### Additionsreglen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (213)$$

### Betinget sandsynlighed

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (214)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

### Multiplikationsreglen

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad (215)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

### $A$ og $B$ uafhængige hændelser

$$P(A|B) = P(A) \quad (216)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (217)$$

### Bayes formel

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} \quad (218)$$

En fabrik producerer en bestemt vare på tre maskiner,  $M_1, M_2$  og  $M_3$ .

Produktionen fordeler sig med 40% på  $M_1$ , 50% på  $M_2$  og 10% på  $M_3$ .

Nogle af varerne er defekte.

Det drejer sig om 5% på  $M_1$ , 6% på  $M_2$  og 30% på  $M_3$ .

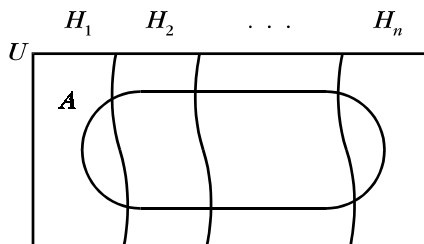
Mængden af defekte varer betegnes  $D$ . En vare fra denne produktion udvælges tilfældigt.

Sandsynligheden for at varen er defekt, er

$$P(D) = 0,05 \cdot 0,4 + 0,06 \cdot 0,5 + 0,30 \cdot 0,10 = 0,08$$

Sandsynligheden for at varen er produceret på  $M_1$ , når det oplyses, at den er defekt, er

$$P(M_1|D) = \frac{0,05 \cdot 0,4}{0,08} = 0,25$$



Udfaldsrum  $U$

Hændelse  $A$

Antal hændelser  $n$

Hændelser  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , der udelukker hinanden, og som udfylder  $U$

### Loven om den totale sandsynlighed

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i) \cdot P(H_i) \quad (219)$$

### Bayes formel (alternativ version)

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j) \cdot P(H_j)}{P(A)}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (220)$$

# Stokastisk variabel

Sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel  $X$  er

$x$	2	5	7
$P(X = x)$	0,4	0,5	0,1

Fordelingsfunktionen for  $X$  er

$x$	2	5	7
$F(x)$	0,4	0,9	1,0

Middelværdien af  $X$  er

$$E(X) = 2 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,1 = 4$$

Variansen af  $X$  er

$$\text{Var}(X) = (2 - 4)^2 \cdot 0,4 + (5 - 4)^2 \cdot 0,5 + (7 - 4)^2 \cdot 0,1 = 3$$

$$\text{Var}(X) = 2^2 \cdot 0,4 + 5^2 \cdot 0,5 + 7^2 \cdot 0,1 - 4^2 = 3$$

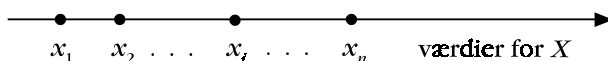
Standardafvigelsen af  $X$  er

$$\sigma(X) = \sqrt{3} = 1,73$$

Fordelingsfunktion  $F$  for en stokastisk variabel  $X$

$$F(x) = P(X \leq x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (221)$$

Diskret stokastisk variabel  $X$



Antal værdier  $n$

Værdier  $x_1, x_2, \dots, x_n$

Sandsynlighedsfunktion  $f$

$$f(x_i) = P(X = x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (222)$$

Fordelingsfunktion  $F$

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^i f(x_j) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (223)$$

Middelværdi  $\mu$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) \quad (224)$$

Varians  $\sigma^2$

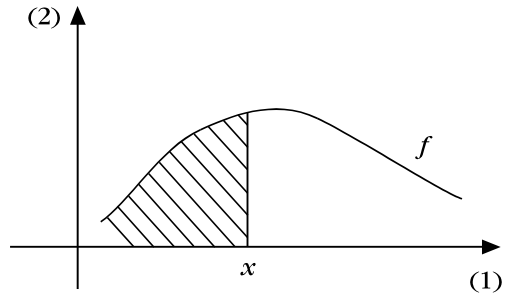
$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \quad (225)$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (226)$$

Standardafvigelse  $\sigma$

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (227)$$

## Kontinuert stokastisk variabel $X$



Figuren viser grafen for en tæthedsfunktion  $f$ .  
Arealet under grafen er lig med 1

### Fordelingsfunktion $F$

$F(x)$  er arealet under grafen for  $f$  til venstre for  $x$  (228)

## Lineær transformation af stokastisk variabel $X$

$$5X + 4$$

Det antages, at  $E(X) = 10$  og  $\text{Var}(X) = 9$ . Så er

$$E(5X + 4) = 5 \cdot 10 + 4 = 54$$

$$\text{Var}(5X + 4) = 5^2 \cdot 9 = 225$$

$$\sigma(5X + 4) = |5| \cdot 3 = 15$$

$$aX + b \quad (229)$$

### Regneregler

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (230)$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X) \quad (231)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X) \quad (232)$$

# Binomialfordeling

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$K(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Lad  $X$  betegne antal defekte enheder i en stikprøve på 50, som stammer fra en produktion, hvoraf 14% af enhederne er defekte. Det antages

$$X \sim b(50; 0,14)$$

Sandsynligheden for at stikprøven indeholder 2 defekte er

$$P(X = 2) = K(50, 2) \cdot 0,14^2 \cdot (1 - 0,14)^{50-2} = 0,0172$$

Det forventede antal defekte i stikprøven er

$$E(X) = 50 \cdot 0,14 = 7$$

Variansen af antal defekte er

$$\text{Var}(X) = 50 \cdot 0,14 \cdot (1 - 0,14) = 6,02$$

Standardafvigelsen af antal defekte er

$$\sigma(X) = \sqrt{50 \cdot 0,14 \cdot (1 - 0,14)} = 2,45$$

**$n$  fakultet  $n!$**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (233)$$

$$0! = 1 \quad (234)$$

**Binomialkoefficient  $K(n, r)$**

$$K(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (235)$$

## Binomialfordelt stokastisk variabel $X$

Antalsparameter  $n$

Sandsynlighedsparameter  $p$

Værdier  $0, 1, 2, \dots, n$

$$X \sim b(n, p) \quad (236)$$

**Sandsynlighedsfunktion**

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r} \quad (237)$$

**Middelværdi**

$$E(X) = n \cdot p \quad (238)$$

**Varians**

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) \quad (239)$$

**Standardafvigelse**

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \quad (240)$$

## Approksimation af binomialfordelt stokastisk variabel $X$ med normalfordeling

Antag, at  $X \sim b(32; 0,25)$ . Så er med tilnærmelse

$$X \sim N\left(32 \cdot 0,25; \sqrt{32 \cdot 0,25 \cdot (1 - 0,25)}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$X \sim N(8, \sqrt{6})$$

$$X \sim b(n, p)$$

Forudsætning  $n \cdot p \geq 5$  og  $n \cdot (1 - p) \geq 5$

Tilnærmelsesvis fordeling af  $X$

$$X \sim N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}\right) \quad (241)$$

Beregning af sandsynligheder ved hjælp af fordelingsfunktionen  $\Phi$  for standardnormalfordelingen

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &\approx \Phi\left(\frac{5 + 0,5 - 32 \cdot 0,25}{\sqrt{32 \cdot 0,25 \cdot (1 - 0,25)}}\right) \\ &= \Phi(-1,02) = 0,15386 \end{aligned}$$

$$P(X \leq a) \approx \Phi\left(\frac{a + 0,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}\right) \quad (242)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{5 - 0,5 - 32 \cdot 0,25}{\sqrt{32 \cdot 0,25 \cdot (1 - 0,25)}}\right) \\ &= 1 - \Phi(-1,43) \\ &= 1 - 0,07636 = 0,92364 \end{aligned}$$

$$P(X \geq a) \approx 1 - \Phi\left(\frac{a - 0,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}\right) \quad (243)$$

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 9) &\approx \Phi\left(\frac{9 + 0,5 - 32 \cdot 0,25}{\sqrt{32 \cdot 0,25 \cdot (1 - 0,25)}}\right) - \\ &\quad \Phi\left(\frac{5 - 0,5 - 32 \cdot 0,25}{\sqrt{32 \cdot 0,25 \cdot (1 - 0,25)}}\right) \\ &= \Phi(0,61) - \Phi(-1,43) \\ &= 0,72907 - 0,07636 \\ &= 0,65271 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &\approx \Phi\left(\frac{b + 0,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}\right) - \\ &\quad \Phi\left(\frac{a - 0,5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}\right) \end{aligned} \quad (244)$$

# Normalfordeling

## Normalfordelt stokastisk variabel $X$

Middelværdi  $\mu$

Standardafvigelse  $\sigma$

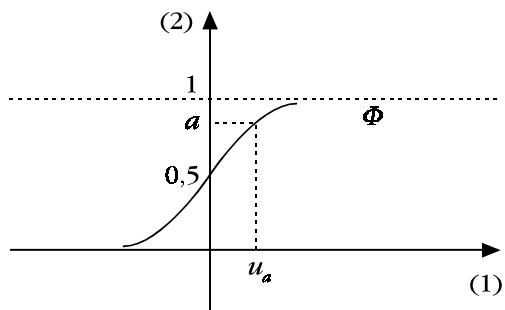
Varians  $\sigma^2$

$$X \sim N(\mu, \sigma) \quad (245)$$

## Standardnormalfordelt stokastisk variabel $U$

$$U \sim N(0,1) \quad (246)$$

Graf for fordelingsfunktion  $\Phi$



$$0,95 - \text{fraktil} = 1,645$$

$$\Phi(1,645) = 0,95$$

$$a - \text{fraktil} = u_a \quad (247)$$

$$\Phi(u_a) = a \quad (248)$$

Antag at  $X \sim N(7, 2)$ , så er

$$\frac{X-7}{2} \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq 8) = \Phi\left(\frac{8-7}{2}\right) = \Phi(0,5) = 0,69146$$

$$\begin{aligned} P(4 \leq X \leq 8) &= \Phi\left(\frac{8-7}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-7}{2}\right) \\ &= \Phi(0,5) - \Phi(-1,5) \\ &= 0,69146 - 0,06681 \\ &= 0,62465 \end{aligned}$$

Det antages, at  $X_i \sim N(10, 2)$

$$i = 1, 2, \dots, 50,$$

og at de stokastiske variable er uafhængige.

Fordelingen af gennemsnittet er

$$\bar{X} \sim N\left(10, \frac{2}{\sqrt{50}}\right)$$

## Standardisering af normalfordelt stokastisk variabel $X$

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad (249)$$

### Beregning af intervalsandsynligheder

$$P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad (250)$$

$$P(X \geq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad (251)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad (252)$$

## Gennemsnit $\bar{X}$ af $n$ uafhængige identisk normalfordelte stokastiske variable

$$X_i \sim N(\mu, \sigma), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

uafhængige stokastiske variable

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (253)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad (254)$$

# Konfidensinterval

På en årgang, der har været til matematikprøve, udvælges 8 elevers karakterer tilfældigt. De udvalgte karakterer blev 10, 9, 11, 9, 8, 6, 7, 8. Stikprøvens middelværdi  $\bar{x} = 8,5$

Af erfaring ved man, at karaktererne er normalfordelt med

varians  $\sigma^2 = 2,25$

Dvs.  $\sigma = \sqrt{2,25} = 1,5$

Et 95% konfidensinterval for gennemsnitskarakteren  $\mu$  er

$$8,5 - 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{8}} < \mu < 8,5 + 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{8}}$$

$\Leftrightarrow$

$$7,46 < \mu < 9,54$$

## Konfidensinterval for middelværdien $\mu$ i en normalfordeling med kendt varians $\sigma^2$

Stikprøvens størrelse  $n$

Observeret middelværdi i stikprøven  $\bar{x}$

Standardafvigelse i normalfordelingen  $\sigma$

$100 \cdot (1 - \frac{\alpha}{2})\%$  – fraktil  $u_{1-\alpha/2}$  i standardnormalfordelingen

### $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ konfidensinterval for $\mu$

$$\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (255)$$

I en stikprøve på 50 enheder er der 8 defekte enheder.

Den observerede andel af defekte er

$$\hat{p} = \frac{8}{50} = 0,16$$

Et 95% konfidensinterval for andelen  $p$  af defekte i produktionen er

$$0,16 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,16 \cdot (1 - 0,16)}{50}} < p <$$

$$0,16 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,16 \cdot (1 - 0,16)}{50}}$$

$\Leftrightarrow$

$$0,06 < p < 0,26$$

## Konfidensinterval for sandsynlighedsparameteren $p$ i en binomialfordeling

Stikprøvens størrelse  $n$

Antal succeser  $x$

Observeret andel af succeser i stikprøven  $\hat{p}$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \quad (256)$$

Forudsætning  $n \cdot \hat{p} \geq 5$  og  $n \cdot (1 - \hat{p}) \geq 5$

$100 \cdot (1 - \frac{a}{2})\%$  – fraktile  $u_{1-a/2}$  i standardnormalfordelingen

**$100 \cdot (1 - a)\%$  konfidensinterval for  $p$**

$$\hat{p} - u_{1-a/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} < p <$$

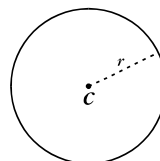
$$\hat{p} + u_{1-a/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}$$

(257)

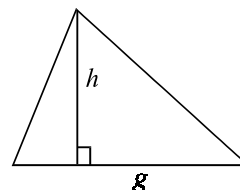


# Areal

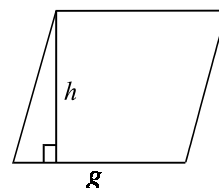
**Cirkel**  
radius  $r$   
areal  $A$   
omkreds  $O$   
 $A = \pi r^2$   
 $O = 2\pi r$



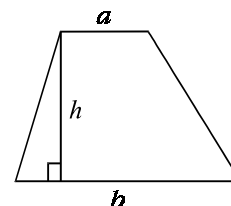
**Trekant**  
højde  $h$   
grundlinie  $g$   
areal  $A$   
 $A = \frac{1}{2}hg$



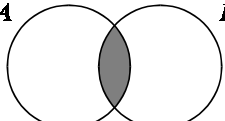
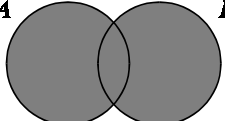
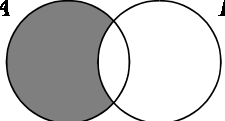
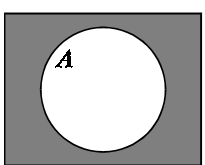
**Parallelogram**  
højde  $h$   
grundlinie  $g$   
areal  $A$   
 $A = hg$



**Trapez**  
højde  $h$   
parallelle sider  $a$  og  $b$   
areal  $A$   
 $A = \frac{1}{2}h(a + b)$

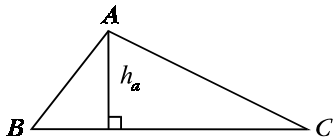
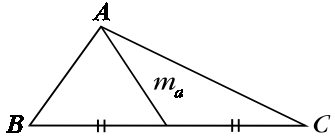
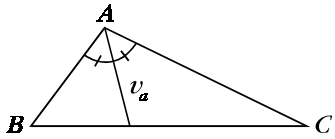


# Matematiske symboler

Symbol	Betydning, læsemåde	Eksempler, bemærkninger m.v.
$\wedge$ $\vee$ non , $\neg$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$	konjunktion ("og") disjunktions ("eller" i betydningen "og/eller") negation implikation ("hvis ... så", "medfører") biimplikation ("ensbetydende med", "hvis og kun hvis")	$p \wedge q$ $p \vee q$ $\text{non } p$ , $\neg p$ $p \Rightarrow q$ $p \Leftrightarrow q$
$\{.,.,.,.\}$ $\{x \in G   p(x)\}$ $\{x   p(x)\}$	mængde, hvis elementer opregnes; mængde skrevet på listeform mængden af de elementer $x$ i $G$ , for hvilke $p(x)$ er sand afkortet symbol der kan anvendes, når det af sammenhængen fremgår, hvilken mængde $G$ der lægges til grund	$\{-2, 5, 8\}$ $\{x \in \mathbb{R}   x < 6\}$ $\{x   x > 6\}$
$\in$ $\subseteq$ $\subset$	er element i (tilhører) er delmængde af er ægte delmængde af	$a \in M$ $A \subseteq B$ $A \subset B$
$\cap$ $\cup$ $\setminus$ $\complement, \bar{\phantom{A}}$ $\times$	fællesmængde foreningsmængde mængdedifferens komplementærmængde mængdeprodukt	$A \cap B$  $A \cup B$  $A \setminus B$  $\complement A, \bar{A}$  $A \times B = \{(a,b)   a \in A \text{ og } b \in B\}$

Symbol	Betydning, læsemåde	Eksempler, bemærkninger m.v.
$[-; ]$	lukket interval	$[-2; 3] = \{x \in \mathbb{R}   -2 \leq x \leq 3\}$
$]; ]$	halvåbent interval	$] - 2; 3] = \{x \in \mathbb{R}   -2 < x \leq 3\}$
$[-; [$	halvåbent interval	$[-2; 3[ = \{x \in \mathbb{R}   -2 \leq x < 3\}$
$]; [$	åbent interval	$] - 2; 3[ = \{x \in \mathbb{R}   -2 < x < 3\}$
N	mængden af naturlige tal	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
Z	mængden af hele tal	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
Q	mængden af rationale tal	tal, der kan skrives på formen $\frac{p}{q}$ , hvor $p \in \mathbb{Z}$ , $q \in \mathbb{N}$
R	mængden af reelle tal	
$\emptyset$	den tomme mængde	$\emptyset = \{ \}$
$(a, b)$	ordnet elementpar	$(2, 6)$
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$	ordnet elementsæt	$(-2, 4, -6)$
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$	hvis indeksemængden, som $i$ skal gennemløbe, fremgår af sammenhængen, skrives blot $\sum a_i$ eller $\sum_i a_i$
$n!$	$n$ faktoret	$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ for $n \in \mathbb{N}$ $0! = 1$
$K(n, r)$ , $\binom{n}{r}$	binomialkoefficient	$K(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
$f: A \curvearrowright B$	funktion $f$ fra $A$ (definitions-mængde for $f$ ) til $B$	i visse sammenhænge bruges udtryksmåder som "funktionen $f(x) = 2x + 5$ ", "funktionen $y = 2x + 5$ " og "funktionen $2x + 5$ "
$f(x)$	funktionsværdi af $x$ ved funktionen $f$	
$\text{Dm}(f)$	definitions-mængde for $f$	
$\text{Vm}(f)$	værdimængde for $f$	
$f + g$	sum af to funktioner	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$f - g$	differens mellem to funktioner	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
$f \cdot g$ , $fg$	produkt af to funktioner	$(f \cdot g)(x) = (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$
$\frac{f}{g}$	kvotient mellem to funktioner	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , hvor $g(x) \neq 0$
$f \circ g$	sammensat funktion	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$f^{-1}$	invers (omvendt) funktion	$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Symbol	Betydning, læsemåde	Eksempler, bemærkninger m.v.
$a^x$	eksponentialfunktion med grundtal $a$ , $a > 0$	$a^x$ betegnes også $\exp_a(x)$
$e^x$	den naturlige eksponentialfunktion	$e^x$ betegnes også $\exp(x)$
log	logaritmefunktionen med grundtal 10	$y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$
ln	den naturlige logaritmefunktion	$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$
sin cos tan cot	sinus cosinus tangens cotangens	tan betegnes også tg $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$ x $	den numeriske (absolutte) værdi af $x$	$ x $ betegnes også $\text{abs}(x)$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $f(x) \rightarrow a$ for $x \rightarrow x_0$ $f(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$	grænseværdi af $f(x)$ for $x$ gående mod $x_0$ $f(x)$ går mod $a$ for $x$ gående mod $x_0$ $f(x)$ går mod uendelig for $x$ gående mod uendelig	$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5) = 4$ , $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ for $x \rightarrow 0$ $x^3 \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$
$\Delta x$ $\Delta f$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}$	$x$ -tilvækst i $x_0$ funktionstilvækst for $f$ i $x_0$ differenskvotient for $f$ i $x_0$	$\Delta x = x - x_0$ $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
$f'(x_0)$ $f'$ $f^{(n)}$	differentialkvotient for $f$ i $x_0$ afledet funktion af $f$ den $n$ -te afledede funktion af $f$	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ betegnes også $\frac{df(x)}{dx}$ , $\frac{df}{dx}$ , $\frac{dy}{dx}$ eller $y'$ i stedet for $f^{(2)}$ og $f^{(3)}$ skrives som regel $f''$ og $f'''$
$\int f(x)dx$ $\int_a^b f(x)dx$	stamfunktion (ubestemt integral til $f$ ) integralet fra $a$ til $b$ af $f$ (bestemt integral)	

Symbol	Betydning, læsemåde	Eksempler, bemærkninger m.v.
$AB$ $ AB $	liniestykket $AB$ længden af liniestykket $AB$	
$\vec{a}$ , $\overrightarrow{AB}$ $ \vec{a} $ , $ \overrightarrow{AB} $ $\hat{\vec{a}}$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$	vektor længde af vektor tværvektor skalarprodukt	
$\parallel$ $\perp$ $\cong$ $\sim$	“er parallel med” “er vinkelret på” “er kongruent med” “er ligedannet med”	
$h_a$  $m_a$  $v_A$  $\angle A$	højden med fodpunkt på siden $a$ eller dennes forlængelse  medianen med fodpunkt på siden $a$  vinkelhalveringslinien for vinkel $A$  vinkel $A$	   $\angle A$ anvendes også som betegnelse for gradtallet, f.eks. $\angle A = 105^\circ$
$X \sim b(n, p)$	$X$ er binomialfordelt med antalsparameter $n$ og sandsynlighedsparameter $p$	
$X \sim N(\mu, \sigma)$	$X$ er normalfordelt med middelværdi $\mu$ og standardafvigelse $\sigma$	

## Stikordsregister for Niveau B

Amortisationsformlen .....	7	Frekvens.....	33	Logaritmefunktioner .....	21
Andengradspolynomium.....	17	- summeret.....	36	Middeltal,	
- nulpunkter .....	17	Fremskrivning .....	6	diskrete observationer.....	33
- rødder.....	17	Fremskrivningsfaktor.....	20	Middeltal,	
Annuitetsregning .....	7	Fremtidsværdi af annuitet .....	7	grupperede observationer..	35
Annuitetsydelse.....	7	Funktion.....	14	Middelværdi, binomialfordelt	
Approksimerende		Funktion, der er proportional		stokastisk variabel .....	39
førstegradspolynomium ....	31	med potensfunktion.....	23	Middelværdi, diskret	
Asymptote for		Funktionsbegrebet.....	14	stokastisk variabel .....	38
polynomiumsbrøk.....	18	Funktionsværdi .....	14	Monotoniintervaller.....	14
Begyndelsesværdi .....	20	Gennemsnit,		Mulig rational nulpunkt i et	
Binomialfordeling.....	39	diskrete observationer .....	33	polynomium .....	17
Binomialfordelt		Gennemsnit,		Mulig rational rod i et	
stokastisk variabel .....	39	grupperede observationer .	35	polynomium .....	17
Binomialkoefficient.....	39	Gennemsnitlig procent.....	5	Niveaulinie .....	30
cos, graf for .....	26	Gennemsnitlig rentefod.....	5	Normalfordeling .....	40
Cosinus .....	26	Grupperede observationer.....	35	Normalfordelt stokastisk	
Cosinusrelationerne .....	13	Gældsformlen.....	7	variabel .....	40
Definitions­mængde.....	14	Halveringskonstant.....	20	Nulpunkter for	
Deskriptiv statistik .....	33	Harmonisk svingning.....	29	andengrads­polynomium ....	17
Differentialkvotient .....	31	- graf for.....	29	Nutidsværdi af annuitet .....	7
Differentialregning.....	31	Histogram .....	36	Observationer, diskrete.....	33
Differentiation af specielle		Hældningskoefficient .....	9	Observationer,	
funktioner.....	32	Hændelse.....	37	grupperede .....	35
Differentiation,		- komplementær.....	37	Omvendt funktions.....	15
regneregler for .....	32	- sandsynlighed for.....	37	Omvendt proportionalitet.....	25
Diskret stokastisk variabel ....	38	Indekstal.....	5	Opsparingsformlen.....	7
Diskrete observationer.....	33	Intervalmidtpunkter .....	35	Parabel .....	11
Diskriminant .....	11; 17	Intervalsandsynligheder,		- skæringspunkter med	
Effektiv rente .....	6	beregning af.....	41	førsteaksen .....	11
EkspONENT .....	24	Komplementær hændelse.....	37	- skæringspunkt med	
Ekspontialfunktion,		Kvartiler .....	34; 36	andenaksen.....	11
den naturlige .....	19	Ligefrem proportionalitet.....	25	- toppunkt .....	11
Ekspontialfunktion med		Ligning for linie .....	10	Periode.....	29
grundtal $a$ .....	19	Ligning for parabel.....	11	Pindediagram .....	34
Ekspontielle		Ligning for tangent.....	31	Polynomier.....	16
funktioner.....	19	Lineær funktion i to variable..	30	Polynomium af grad $n$ .....	17
Ekspontiel ligning .....	20	Linie .....	9	Potensfunktioner .....	23
Ekspontielt voksende/		Lodret asymptote.....	18	Potensligning .....	24
aftagende funktion.....	19	log og ln,		Potensregneregler .....	8
Faktorisering af		sammenhæng mellem .....	22	Procentregning .....	5
andengrads­polynomium....	17	Logaritmefunktion,		Proportionalitet.....	25
Fordelingsfunktion.....	38	den naturlige.....	22	Rentesregning.....	6
Fordoblingskonstant.....	20	Logaritmefunktionen med		Retvinklet trekant.....	12
Fraktiler.....	34; 36	grundtal 10.....	21	Sammensat funktion.....	15

Sandsynlighed			
- for hændelse .....	37		
- for komplementær hændelse.....	37		
Sandsynligheder,			
regneregler for .....	37		
Sandsynlighedsfunktion .....	37		
- binomialfordelt stokastisk variabel .....	39		
- diskret stokastisk variabel .....	38		
Sandsynlighedsregning .....	37		
sin, graf for.....	26		
Sinus .....	26		
Sinusrelationerne .....	13		
Skrå asymptote.....	18		
Standardafvigelse,			
binomialfordelt stokastisk variabel.....	39		
Standardafvigelse,			
diskret stokastisk variabel..	38		
Stigningstal.....	9		
Stokastisk variabel .....	38		
- binomialfordelt.....	39		
- diskret .....	38		
- normalfordelt.....	40		
Sumkurve .....	36		
Summerede frekvenser ....	34; 36		
Søjlediagram .....	36		
tan, graf for.....	27		
Tangens .....	27		
Tangent, ligning for.....	31		
Tilbageskrivning.....	6		
Toppunkt for parabel.....	11		
Trappediagram.....	34		
Trekant .....	12		
- areal.....	13		
- retvinklet .....	12		
- vilkårlig.....	13		
Trigonometriske funktioner ...	26		
- specielle funktionsværdier .....	28		
Trigonometriske grundligninger .....	28		
Udfaldsrum .....	37		
Vandret asymptote.....	18		
Varians .....	38; 39		
- binomialfordelt stokastisk variabel .....	39		
- diskret stokastisk variabel .....	38		
Vejet gennemsnit .....	5		
Vilkårlig trekant.....	13		
Værdimængde.....	14		

## Stikordsregister for Niveau A

Additionsregelen .....	60	Fordelingsfunktion, standardnormalfordelt	- ligning for .....	47
Afstand.....	48	stokastisk variabel, graf ....	- retningsvektor for .....	47
- fra punkt til linie .....	48	Gennemsnit af $n$ uafhængige	Loven om den totale	
- i planen.....	48	identisk normalfordelte	sandsynlighed .....	61
- mellem to punkter.....	48	stokastiske variable.....	Længde af vektor .....	43
Approximation af binomial-		Hyperbel .....	Længde af vektor bestemt af	
fordelt stokastisk variabel		- asymptoter .....	to punkter i planen .....	46
med normalfordeling.....	65	Hændelse,	Middelværdi	
Areal		sandsynlighed for .....	- binomialfordelt	
- af cirkel.....	50	Højresum .....	stokastisk variabel .....	64
- af det parallelogram, to		Integralregning.....	- diskret	
vektorer udspænder.....	45	- delvis .....	stokastisk variabel .....	62
- af ellipse .....	51	- partiel.....	Multiplikationsreglen.....	60
- af trekant.....	46	- ved substitution.....	$n$ faktuel.....	64
Arealberegning.....	56	Integrations	Niveaukurve.....	53
Asymptoter til hyperbel.....	52	Intervalsandsynligheder,	Normalfordeling .....	66
Bayes formel .....	60	beregning af.....	Normalfordelt stokastisk	
- alternativ version .....	61	Konfidensinterval for	variabel .....	66
Beregning af sandsynligheder		middelværdien i en	- middelværdi.....	66
ved hjælp af fordelings-		normalfordelt	- standardafvigelse .....	66
funktionen for standard-		population.....	- varians .....	66
normalfordelingen .....	65	Konfidensinterval for	Numerisk integration .....	57
Bestemt integral,		sandsynligheds-	Omkreds af cirkel .....	50
regneregler for .....	55	parameteren i en	Parabel .....	49
- tilnærmelsessummer for .	57	binomialfordeling .....	Partiel integration.....	55
Betinget sandsynlighed.....	60	Kontinuert stokastisk	Projektion af vektor	
Binomialfordeling.....	64	variabel.....	på vektor .....	45
Binomialfordelt		Koordinatsæt for vektor	Retningsvektor .....	47
stokastisk variabel .....	64	bestemt ved to punkter	Sandsynlighed,	
Binomialkoefficient.....	64	i planen.....	- betinget .....	60
Cirkel .....	50	Kvadratisk funktion	- for en hændelse .....	59
Delintervallængde.....	57	i to variable .....	- for komplementær-	
Delvis integration .....	55	Ligning	hændelse .....	59
Differens mellem		- for asymptoter	- loven om den totale .....	61
to vektorer.....	44	til hyperbel .....	Sandsynligheder,	
Differentialligninger.....	58	- for cirkel .....	regneregler for.....	59
Diskret stokastisk variabel ....	62	- for ellipse.....	Sandsynlighedsfunktion .....	59
Diskriminant .....	49	- for hyperbel .....	- binomialfordelt	
Ellipse.....	51	- for linie .....	stokastisk variabel .....	64
Fordelingsfunktion, diskret		- for parabel.....	- diskret	
stokastisk variabel .....	62	Lineær transformation af	stokastisk variabel .....	62
Fordelingsfunktion for en		stokastisk variabel.....	Sandsynlighedsregning .....	59
stokastisk variabel .....	62	Linie	Skalarprodukt .....	44
Fordelingsfunktion, kontinuert		- i planen .....	Stamfunktion .....	54
stokastisk variabel .....	63		- til specielle funktioner ....	54

Standardafvigelse,	Sum af to vektorer.....44	- normalfordelt
- binomialfordelt	Tilnærmelsessummer	stokastisk variabel .....66
stokastisk variabel..... 64	for bestemt integral.....57	Vektor bestemt ved to punkter
- diskret	Toppunkt .....49	i planen.....46
stokastisk variabel..... 62	Trapezsum .....57	Vektorer i planen .....43
- normalfordelt	Tværvektor .....45	- areal af parallelogram,
stokastisk variabel..... 67	Uafhængige hændelser .....60	udspændt af to .....45
Standardisering	Ubestemt integral	- differens mellem to .....44
af normalfordelt	regneregler for.....55	- regning med .....43
stokastisk variabel ..... 67	Udfaldsrum.....59	- sum af to.....44
Stokastisk variabel..... 62	Varians,	- vinkelrette.....44
- binomialfordelt ..... 64	- binomialfordelt	Venstresum .....57
- diskret..... 62	stokastisk variabel.....64	Vinkelrette vektorer.....44
- kontinuert ..... 63	- diskret	
- normalfordelt ..... 66	stokastisk variabel.....62	